Doc. Ing. Michal Chobot, CSc.
Doc. RNDr. Ing. František Turnovec, CSc.
RNDr. Vladimír Ulašin

TEÓRIA HIER A ROZHODOVANIA

Vydavateľstvo Alfa • Bratislava

Vysokoškolská učebnica oboznamuje čitateľa s matematickými nástrojmi modelovania, s analýzou a riešením problémov konfliktného rozhodovania, ako i s aplikačnými možnosťami. Znalosti z tejto problematiky umožnia spresniť ekonomické rozhodovanie a poznanie ekonomických javov.

Určená je študentom VŠE, ale rovnako môže byť vhodnou pomôckou pre študentov iných vysokých škôl, ako i pre pracovníkov v oblasti riadenia ekonomiky.

Autorský kolektív:
Doc. Ing. MICHAL CHOBOT, CSc.: Úvod, kap. 1, 3, 5, 6.2, 6.4
Doc. RNDr. Ing. FRANTIŠEK TURNOVEC, CSc.: kap. 2, 4, 6.3
RNDr. VLADIMÍR ULAŠIN: kap. 6.1

Lektori:
Doc. RNDr. MILAN HAMALA, CSc.
Doc. RNDr. EDUARD HOZLÁR, CSc.

Redakcia ekonomickej literatúry — vedúca redaktorka Ing. ANNA SRŠŇOVÁ

ISBN 80-05-00702-7

OBSAH

ÚVOD

Cieľom tejto vysokoškolskej učebnice je poskytnúť čitateľovi prehľad základných poznatkov o súčasnej teórii hier a jej aplikačných možnostiach. Určená je poslucháčom rôznych foriem štúdia na ekonomických fakultách, avšak užitočné poznatky v nej nájdu aj všetci záujemci o moderné metódy skúmania v takých spoločenskovedných disciplínach, akými sú sociológia, psychológia a politológia. Autori by uvítali, keby záujem o ich knihu zo strany vojenskej vedy bol čo najmenší.

V prvej kapitole knihy definujeme základné pojmy modelovania konfliktných situácií. Druhá kapitola je venovaná teórii konečných hier dvoch hráčov, maticových a bimaticových hier a vzťahom medzi teóriou hier a teóriou matematického programovania. Tretia kapitola sa zaoberá nekonečnými hrami dvoch hráčov. V štvrtej kapitole uvádzame prehľad základných poznatkov o kooperatívnej a nekooperatívnej teórii hier n hráčov. Piata kapitola obsahuje poznatky o rozhodovaní v podmienkach neurčitosti a rizika. Niektoré nové poznatky a smery ďalšieho rozvoja teórie hier a jej aplikácií uvádzame v šiestej kapitole.

Štúdium učebnice predpokladá, že čitateľ pozná základy lineárnej algebry, matematickej analýzy, teórie pravdepodobnosti a matematického programovania v rozsahu základných vysokoškolských kurzov na ekonomických školách.

Autori vyjadrujú svoju vďaku recenzentom Doc. RNDr. M. Hamalovi, CSc. z Matematicko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave a Doc. RNDr. E. Hozlárovi, CSc. z Fakulty riadenia VŠE v Bratislave za dôkladnú lektúru rukopisu a cenné pripomienky.

AUTORI

1 MODELY ROZHODOVACÍCH SITUÁCIÍ

V tejto kapitole definujeme základné pojmy, používanú terminológiu a formulujeme všeobecný matematický model rozhodovacej situácie. Ďalej uvádzame špeciálne prípady tohto modelu, ktoré sú modelmi matematického programovania, teórie hier, teórie rozhodovania za rizika a neurčitosti a teórie viackriteriálnej optimalizácie. Osobitnú pozornosť venujeme konfliktným rozhodovacím situáciám, ktoré podrobnejšie vysvetľujeme v ďalších kapitolách.

1.1 CHARAKTERISTIKA ROZHODOVACÍCH SITUÁCIÍ

Rozhodovaním rozumieme proces výberu jedného z viacerých variantov. Rozhodujúcim sa subjektom je zvyčajne človek alebo jednomyseľne vystupujúci kolektív ľudí, ktorý ako reprezentant vlastných záujmov alebo záujmov nejakej organizácie vykonáva výber variantov. Situácie, v ktorých treba vykonať výber jedného z väčšieho počtu variantov, t. j. rozhodnúť sa, nazývame *rozhodovacími situáciami.*

Výber variantov vedie k určitým výsledkom rozhodovacej situácie. Tieto výsledky môžu byť z hľadiska záujmov rozhodujúceho sa subjektu lepšie alebo horšie. Ak rozhodujúci sa subjekt vychádza z porovnania možných výsledkov a usiluje sa vybrať v istom zmysle najlepší variant, nazývame ho racionálnym účastníkom rozhodovacej situácie. Potom výber v „istom zmysle najlepšieho“ variantu nazývame *optimálnym rozhodovaním.*

Z praxe vieme, že nie každý rozhodujúci sa subjekt je racionálny. Subjekt, ktorý je k výsledkom rozhodovania ľahostajný, nazývame indiferentným účastníkom rozhodovacej situácie. Pojem indiferentný účastník interpretujeme ďalej dosť všeobecne. Indiferentný účastník môže byť tak človek, ktorý vyberá varianty bez hodnotenia výsledkov, ako aj nejaký faktor náhodného charakteru (napríklad prírodné podmienky), vo vzťahu s ktorým nemá pojem hodnotenia výsledkov vôbec zmysel. V obidvoch prípadoch môžeme k indiferentnému účastníkovi pristupovať ako k nejakému náhodnému mechanizmu, ktorý vyberá varianty podľa určitého (známeho alebo neznámeho) pravdepodobnostného rozdelenia. Aby v úvahách o rozhodovacích situáciách nevznikali nedorozumenia, použijeme v tomto prípade namiesto termínu výber variantov termín stavy vznikajúce v dôsledku pôsobenia indiferentného účastníka.

Ďalej predpokladáme, že rozhodovacia situácia má aspoň jedného racionálneho účastníka a hľadáme odpoveď na otázku: *aké rozhodovanie racionálneho účastníka možno pokladať v danej rozhodovacej situácii za optimálne?*

Predpokladajme, že výsledky rozhodovania z hľadiska záujmov racionálneho účastníka možno hodnotiť pomocou jednej alebo viacerých charakteristík (kritérií). V prvom prípade hovoríme o rozhodovacích situáciách so skalárnym ohodnotením výsledkov, v druhom prípade o rozhodovacích situáciách s vektorovým ohodnotením výsledkov.

Podľa počtu účastníkov rozhodovacej situácie hovoríme o rozhodovacích situáciách s jedným účastníkom (v tomto prípade ide vždy o racionálneho účastníka) a o rozhodovacích situáciách s viacerými účastníkmi (pričom pripúšťame, že niektorí z účastníkov môžu byť indiferentní).

Rozhodovacie situácie s jedným účastníkom a so skalárnym ohodnotením výsledkov nazývame nekonfliktnými rozhodovacími situáciami. Takýmito rozhodovacími situáciami sa zaoberá najmä teória matematického programovania.

V ostatných prípadoch hovoríme o konfliktných rozhodovacích situáciách. Konfliktná rozhodovacia situácia má aspoň jeden z nasledujúcich znakov:

a) väčší počet racionálnych účastníkov,

b) aspoň jedného racionálneho a indiferentného účastníka,

c) vektorové ohodnotenie výsledkov.

Doteraz neexistuje jednotná a dostatočne všeobecná teória optimálneho rozhodovania v konfliktných rozhodovacích situáciách, ktoré majú všetky tri z uvedených znakov, t. j. v ktorých vystupuje väčší počet racionálnych účastníkov spolu s indiferentným účastníkom a v ktorých rozhodovanie racionálnych účastníkov vychádza z vektorového ohodnotenia výsledkov. Operačná analýza dáva však k dispozícii viac alebo menej rozpracované teórie jednotlivých špeciálnych prípadov.

Konfliktnými rozhodovacími situáciami s väčším počtom racionálnych účastníkov a so skalárnym ohodnotením výsledkov sa zaoberá teória hier.

Konfliktnými rozhodovacími situáciami s väčším počtom racionálnych účastníkov alebo s jedným racionálnym účastníkom a jedným indiferentným účastníkom a so skalárnym ohodnotením výsledkov sa zaoberá teória rozhodovania za rizika a neurčitosti.

Konfliktnými rozhodovacími situáciami s jedným racionálnym účastníkom a s vektorovým ohodnotením výsledkov sa zaoberá teória viackriteriálnej optimalizácie.

Uvedené tri oblasti operačnej analýzy spolu veľmi tesne súvisia. Najvšeobecnejšou a najviac rozpracovanou z nich je teória hier, ktorá poskytuje analytické nástroje pre ďalšie dve oblasti. Súčasne prebieha vývoj samej teórie hier, ktorá zovšeobecňuje svoje modely tak, aby okrem konfliktu medzi racionálnymi účastníkmi rozhodovacích situácií zahŕňali aj konfliktnosť vychádzajúcu z účasti indiferentných účastníkov (náhodné faktory), resp. konfliktnosť rôznych cieľov (vektorové ohodnotenie výsledkov).

Príklady konfliktných rozhodovacích situácií nachádzame v rozličných oblastiach života spoločnosti, napríklad šachová hra a iné tzv. salónne hry, vojenské stretnutia a konflikty, medzinárodné rokovanie, koordinácia činnosti rozličných zložiek ekonomickej sústavy, rozhodovanie o výrobnom programe podniku pri sledovaní väčšieho množstva ekonomických ukazovateľov hospodárskej činnosti, rokovanie o rozdeľovaní zdrojov, súdne konanie, problém voľby pestovania poľnohospodárskych kultúr alebo začiatku ich zberu. To sú len niektoré z možných rozhodovacích situácií konfliktného typu.

Sformulujeme všeobecný matematický model rozhodovacej situácie, z ktorého budeme vychádzať pri ďalších úvahách.

Nech $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina racionálnych účastníkov rozhodovacej situácie a $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$ je množina indiferentných účastníkov.

Predpokladajme, že každý racionálny účastník $p \in P$ má k dispozícii množinu X_p variantov rozhodovania. Množinu možných stavov, ktoré vznikajú v dôsledku pôsobenia indiferentného účastníka $q \in Q$ označíme ako Y_q.

Výsledkom rozhodovacej situácie nazývame súbor variantov zvolených racionálnymi účastníkmi a stavov, ktoré nastali v dôsledku pôsobenia indiferentných účastníkov. Výsledok označíme ako

$$(x, y)$$

kde

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_p \in X_p$$

a

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad y_q \in Y_q$$

Množinu možných výsledkov rozhodovacej situácie nazývame karteziánsky súčin

$$V = X \times Y$$

kde

$$X = \prod_{p=1}^{n} X_p \qquad \text{a} \qquad Y = \prod_{q=1}^{m} Y_q$$

Predpokladajme, že každý racionálny účastník pozná nejakú závislosť medzi výsledkami rozhodovacej situácie a určitými efektmi, ktoré pre neho z týchto výsledkov vyplývajú. Nech príslušnú závislosť pre p-tého racionálneho účastníka vyjadruje vektorová funkcia

$$M_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} M_{p_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ M_{p_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ M_{p_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

kde $M_{p_s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sú skalárne funkcie definované na karteziánskom súčine $X \times Y$. Vektorovú funkciu $M_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nazývame hodnotiacou funkciou p-tého účastníka.

Matematickým modelom rozhodovacej situácie v normálnom tvare nazývame množinu P racionálnych účastníkov, množinu Q indiferentných účastníkov, n množín $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variantov racionálnych účastníkov, m množín $Y_1, X_2, \ldots, X_n$ variantov racionálnych účastníkov, m množín $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ stavov indiferentných účastníkov a n hodnotiacich funkcií $M_1, M_2, \ldots, M_n$ racionálnych účastníkov. Racionálni hráči sa snažia maximalizovať svoju hodnotiacu funkciu.

V kompaktnom tvare môžeme matematický model rozhodovacej situácie zapísať takto

$$\left\{\begin{array}{l} P = \{1, 2, \ldots, n\};\ X_1, X_2, \ldots, X_n, M_1, \ldots, M_n \\ Q = \{1, 2, \ldots, m\};\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Treba ešte povedať, v akom zmysle pokladáme účastníka $p \in P$ rozhodovacej situácie za racionálneho. Všeobecne prijateľná vyčerpávajúca definícia racionality účastníka rozhodovacej situácie, zobrazenej modelom (1.1), doteraz neexistuje a pravdepodobne by nebolo reálne pokúšať sa o jej formuláciu. Hovorme predbežne o „minimálnom" chápaní racionálneho účastníka, ktoré nám ponecháva dostatočný priestor na jeho ďalšie rozvíjanie v jednotlivých špeciálnych prípadoch.

Nech $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)})$ a $(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$ sú dva rozličné výsledky rozhodovacej situácie, pričom platí

$$M_{p_s}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)}) \geqq M_{p_s}(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$$

pre všetky $s = 1, 2, \ldots, k$ a aspoň pre jedno s platí

$$M_{p_s}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)}) > M_{p_s}(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$$

Potom p-tý racionálny účastník rozhodovacej situácie uprednostňuje výsledok $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)})$ pred výsledkom $(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$.

Model (1.1) môžeme analyzovať z dvoch hľadísk.

Na jednej strane nás môže zaujímať, ako sa bude v rozhodovacej situácii správať priemerný jedinec vystupujúci v úlohe racionálneho účastníka. Chceme odhadnúť výsledok nejakej rozhodovacej situácie, vykonať jej prognózu. V tejto súvislosti hovoríme o deskriptívnom hľadisku.

Okrem toho nás tiež môže zaujímať, aké je v danej rozhodovacej situácii „najlepšie" rozhodnutie každého z účastníkov, resp. kedy sa racionálny účastník rozhoduje optimálne. V tomto prípade hovoríme o normatívnom hľadisku.

Deskriptívny prístup k analýze modelov typu (1.1) je skôr predmetom záujmu sociológie, psychológie a iných behavioristických spoločenských vied, aj keď

od neho nemôže úplne abstrahovať ani teória rozhodovania. Nás zaujíma predovšetkým *ekonomické modelovanie*, ktoré už v svojej podstate obsahuje princíp výberu „optimálnych variantov". Model (1.1) skúmame preto z normatívneho hľadiska, t. j. z hľadiska teórie optimálneho rozhodovania.[1]

Pojem optimálne riešenie, resp. optimálne rozhodovanie sa stal v posledných rokoch veľmi frekventovaným, a to nielen v odbornej literatúre. Často sa používa v najrozličnejších súvislostiach bez presného vymedzenia svojho obsahu. Pokladáme preto za potrebné hneď na začiatku aspoň stručne upozorniť na filozofiu optimálnosti, z ktorej vychádzame.

Ak ďalej hovoríme o optimálnom rozhodovaní, máme na zreteli určitú charakteristiku správania racionálnych účastníkov v modeli (1.1), resp. v jeho špeciálnych prípadoch (napríklad pravidlo, podľa ktorého racionálny účastník rozhodovacej situácie v závislosti od meniacich sa podmienok vyberá varianty, ktoré sú pre neho z určitého hľadiska najvýhodnejšie). Optimálnym rozhodnutím nazývame konkrétny variant, ktorý je pri fixovaných podmienkach pre určitého účastníka „najvýhodnejší".

Doteraz sme sa vyjadrovali veľmi neurčito a robili sme to zámerne. Všeobecne nie je totiž pojem optimálneho rozhodovania racionálneho účastníka v modeli (1.1) definovaný vyhovujúcim spôsobom. V niektorých špeciálnych prípadoch možno síce odvodiť intuitívne zrejmú jednoznačnú definíciu optimálneho rozhodovania, ktorá priamo vyplýva z nášho „minimálneho" chápania racionality účastníka (napríklad modely nekonfliktných rozhodovacích situácií), v iných prípadoch (najmä modely rozhodovacích situácií s väčším počtom racionálnych účastníkov, resp. s vektorovým ohodnotením výsledkov) je však jednoznačná definícia optimálnosti problematická a závisí od mnohých predpokladov, ktoré majú vo veľkej miere subjektívny charakter.

Aj v týchto (z hľadiska teórie problematických) situáciách sa však treba rozhodovať a napríklad v súlade s potrebami automatizácie niektorých rozhodovacích činností je osobitne dôležité formulovať presné pravidlá výberu variantov. Úlohou teórie optimálneho rozhodovania je aj v týchto problematických prípadoch poskytnúť normatívny návod na rozhodovanie, ktorý by na jednej strane umožnil vylúčiť zjavne „nerozumné" varianty a na druhej strane formalizovať výber „prijateľných" variantov.

Pri analýze každej triedy modelov rozhodovacích situácií definujeme, ktoré výsledky pokladáme za optimálne, pokúsime sa tieto definície optimálnosti logicky zdôvodniť a ukážeme, ako možno určiť príslušné normatívne optimálne výsledky v konkrétnych matematických modeloch.

[1] Takýto prístup k netriviálnym modelom typu (1.1) sa najdôslednejšie prejavuje v prácach o operačnej analýze. V domácej literatúre sa teóriou hier ako nástrojom optimálneho rozhodovania zaoberá napríklad [21].

Ako sme už uviedli, rozhodovacie situácie s jedným účastníkom a so skalárnym ohodnotením výsledkov nazývame nekonfliktnými rozhodovacími situáciami. Matematický model nekonfliktnej rozhodovacej situácie môžeme zapísať takto:

$$\{P = \{1\};\ X,\ M\} \tag{1.2}$$

kde P je množina skladajúca sa z jediného účastníka,
X — množina variantov tohto účastníka,
M — jeho skalárna hodnotiaca funkcia definovaná na množine X.

Definícia optimálneho rozhodovania v modeli (1.2) nevyvoláva nijaké diskusie. Za predpokladu, že výsledok rozhodovacej situácie je úplne určený rozhodnutím jediného účastníka, pričom každému výsledku možno jednoznačne priradiť nejaké číslo charakterizujúce jeho „kvalitu", nemôže racionálny účastník postupovať iným spôsobom, ako hľadať variant $\boldsymbol{x}$ z množiny X s čo najvyššou hodnotou funkcie $M(\boldsymbol{x})$.

Problémami optimálneho rozhodovania v nekonfliktných rozhodovacích situáciách sa zaoberá najmä teória matematického programovania. Tieto problémy sú podrobnejšie uvedené v [38]. Chceme sa zaoberať analýzou konfliktných rozhodovacích situácií, t. j. takých rozhodovacích situácií, kde všeobecne môže vystupovať väčší počet racionálnych účastníkov, pričom sa pripúšťa pôsobenie indiferentných účastníkov.

1.2 KONFLIKTNÉ ROZHODOVACIE SITUÁCIE — HRY A ICH KLASIFIKÁCIA

Klasickým prípadom konfliktnej rozhodovacej situácie je rozhodovacia situácia s väčším počtom racionálnych účastníkov a so skalárnymi hodnotiacimi funkciami. Modely konfliktných rozhodovacích situácií tohto typu sú predmetom štúdia teórie hier.

Zmienime sa najprv stručne o genéze tejto zaujímavej matematickej disciplíny. Väčšina matematických metód, ktoré sa dnes používajú v ekonómii a v ďalších spoločenských vedách, má svoj pôvod v matematickej fyzike a v iných prírodovedných aplikáciách matematiky. Aj keď sa doteraz ešte nevyčerpali všetky možnosti, ktoré pre ekonomickú analýzu poskytujú už hotové nástroje prírodných vied, treba si uvedomiť, že analógia medzi spoločenskými a prírodnými javmi, ktoré oprávňujú použitie podobného matematického aparátu, je ohraničená. Pre spoločenské javy, v ktorých sa stretávajú záujmy cieľovo sa správajúcich indivíduí a kolektívov, je však obťažné hľadať analógiu vo fyzike.

Spolu s nástrojmi, ktoré spoločenské vedy na ceste k exaktnosti preberajú z iných oblastí a upravujú ich pre svoje účely, treba rozvíjať aj špecifické

nástroje, ktoré adekvátnejšie ako nástroje prírodných vied odrážajú osobitosti spoločenských javov, prejavujúce sa okrem iného aj v ich konfliktnom charaktere.

Vznik teórie hier, ktorá sa zaoberá modelovaním a analýzou rozsiahlej triedy konfliktných situácií, bol prvým krokom na ceste k principiálne novému matematickému aparátu spoločenskovednej analýzy. Jej základy vytvorili v štyridsiatych rokoch tohto storočia matematik JOHN von NEUMANN a ekonóm a štatistik OSKAR MORGENSTERN.[1] Postupne sa táto teória premenila na samostatnú súčasť operačnej analýzy a dnes je veľmi rýchlo sa rozvíjajúcou matematickou disciplínou, ktorá nachádza čoraz väčší počet aplikácií. Významný prínos k rozvoju teórie hier predstavuje aj sovietska matematická škola pod vedením N. N. VOROBIEVA.

Vychádzajúc zo všeobecného modelu (1.1) môžeme model konfliktnej rozhodovacej situácie s väčším počtom racionálnych účastníkov a so skalárnym ohodnotením výsledkov zapísať takto:

$$\{P = \{1, 2, \dots, n\};\ X_1, X_2, \dots, X_n;\ M_1, M_2, \dots, M_n\} \tag{1.3}$$

kde P je množina racionálnych účastníkov,
$X_1, \dots, X_n$ — množiny variantov racionálnych účastníkov,
$M_1, \dots, M_n$ — skalárne hodnotiace funkcie racionálnych účastníkov definované na karteziánskom súčine

$$X = \prod_{p=1}^{n} X_p$$

V súlade s prijatou terminológiou model (1.3) ďalej nazývame hrou v normálnom tvare, účastníkov $p \in P$ hráčmi, množiny variantov X_p množinami stratégií a hodnotiace skalárne funkcie M_p funkciami platieb hráčov.

Konfliktnú rozhodovaciu situáciu, modelovanú hrou v normálnom tvare, môžeme interpretovať takto: Každý z hráčov volí jednu zo svojich stratégií $x_p \in X_p$. V závislosti od výsledku

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

určeného voľbami stratégií hráčov, získa p-ty hráč sumu

$$M_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ktorú nazývame platbou.

---

[1] Pôvodným impulzom pre rozvoj teórie hier bola analýza bežných spoločenských alebo hazardných hier. Táto problematika sa sporadicky objavuje v prácach matematikov už od 17. storočia. Z formálnej analógie medzi hrami v užšom slova zmysle a zložitejšími konfliktnými situáciami sa odvodil samotný názov teórie ako aj terminológia. Fundamentálne dielo J. von NEUMANNA a O. MORGENSTERNA (pozri [47]) bolo vydané v roku 1944. Odvtedy nastal rýchly rozvoj teórie hier. Podrobnejší historický prehľad rozvoja teórie hier možno nájsť v [70].

Pri analýze hry v normálnom tvare sa zvyčajne predpokladá, že každý hráč má úplnú informáciu o všetkých prvkoch modelu (1.3), t.j. pozná vlastnú množinu stratégií a funkciu platieb a množiny stratégií a funkcie platieb ostatných hráčov, pričom konanie ani jedného z hráčov nezávisí od nejakých vonkajších faktorov, ktoré nie sú obsiahnuté v modeli. Za týchto predpokladov hovoríme, že hráč je racionálny, ak

a) pri zadaných stratégiách ostatných hráčov volí takú stratégiu, ktorá maximalizuje jeho funkciu platieb,

b) očakáva pritom, že aj ostatní hráči konajú racionálne, t.j. rovnakým spôsobom, ako by na ich mieste konal on sám.

Model (1.3) je stále ešte príliš všeobecný na to, aby sme preň mohli sformulovať univerzálnu definíciu optimálneho rozhodovania hráčov. V niektorých prípadoch sa nám podarí definovať optimálne rozhodovanie priamo na základe predpokladov o racionalite hráča, v iných prípadoch treba zaviesť dodatočné predpoklady. Otázku optimálneho rozhodovania preto preskúmame až v súvislosti s rozborom jednotlivých špeciálnych prípadov modelu (1.3).

Poznamenávame, že na prvý pohľad model (1.3) nie je príliš reálny, pretože prezentuje konfliktnú rozhodovaciu situáciu ako jednorazový akt voľby stratégií. V skutočnosti môže mať konflikt viacerých racionálnych účastníkov dynamický charakter, t.j. môže byť postupnosťou väčšieho počtu elementárnych činností a rozhodnutí vykonaných v určitom poradí. Dynamický charakter konfliktnej rozhodovacej situácie môžeme opísať pomocou tzv. hry v rozvinutom tvare (pozri napr. [33]).

V konfliktnej rozhodovacej situácii často existuje možnosť výmeny informácie a spolupráce medzi jednotlivými účastníkmi s cieľom zvýšiť ich platby, ktorá sa prejavuje vznikom tzv. koalícií. Koalícia je skupina hráčov, ktorí v hre spolupracujú podľa vopred uzavretej záväznej dohody. Záväznosť dohody spočíva v tom, že po dohovore členov koalície o spoločnom postupe, nenaruší ani jeden z nich túto dohodu ani vtedy, keby tým mohol získať nejakú výhodu. Tieto otázky preskúmame v štvrtej kapitole.

Hry môžeme klasifikovať podľa viacerých príznakov.

Ak vychádzame z počtu účastníkov hry (hráčov), hovoríme o hrách dvoch hráčov a o hrách n hráčov ($n > 2$).

Ak sú množiny stratégií všetkých hráčov konečné, hovoríme o *konečných hrách.* V opačnom prípade, ak množina stratégií aspoň jedného z hráčov je nekonečná, hovoríme o *nekonečných hrách.*

Podľa súčtu platieb hráčov hovoríme o hre s konštantným súčtom platieb, keď pre všetky $\mathbf{x} \in X$ platí

$$\sum_{p \in P} M_p(x) = c$$

kde c je nejaká konštanta nezávislá od $\mathbf{x}$.

Špeciálnym prípadom pri $c = 0$ sú *hry s nulovým súčtom platieb.* V prípade, keď pre rôzne výsledky dostaneme rôzne súčty platieb, skúmame tzv. hry s nekonštantným súčtom platieb.

Modely konfliktných rozhodovacích situácií typu (1.1), v ktorých nie je prípustný vznik koalície, nazývame *nekooperatívnymi hrami.* V opačnom prípade hovoríme o *kooperatívnych* alebo *koaličných hrách.*

Neskôr sa oboznámime aj s ďalšími klasifikačnými príznakmi (napríklad podľa vlastností funkcií platieb a množín stratégií hráčov, podľa typu koaličnej spolupráce, podľa množstva informácie, ktoré majú hráči k dispozícii v priebehu hry).

Podľa tejto klasifikácie preskúmame najprv konečné hry dvoch hráčov, ďalej nekonečné hry dvoch hráčov a potom súhrnne hry n hráčov (v normálnom a rozvinutom tvare nekooperatívne a kooperatívne). V záverečnej kapitole opíšeme niektoré ďalšie špeciálne triedy hier a niektoré novšie smery rozvoja teórie hier. Pre názornosť v každej kapitole jednotlivé modely rozhodovacích situácií vysvetľujeme na príkladoch.[1]

Do skupiny konfliktných rozhodovacích situácií patria aj modely rozhodovania za neurčitosti a rizika. Teória rozhodovania za neurčitosti a rizika sa zaoberá modelmi konfliktných rozhodovacích situácií s jedným racionálnym a jedným indiferentným účastníkom, v ktorých racionálny účastník vychádza zo skalárneho ohodnotenia výsledkov.

Model takej konfliktnej situácie môžeme zapísať takto:

$$\begin{Bmatrix} P = \{1\};\ X,\ M \\ Q = \{1\};\ Y \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

kde P sa skladá z jedného racionálneho účastníka, množina Q sa skladá z jedného indiferentného účastníka, X je množina variantov racionálneho účastníka, Y je množina stavov, ktoré vznikajú v dôsledku pôsobenia indiferentného účastníka a skalárna hodnotiaca funkcia M racionálneho účastníka je definovaná na karteziánskom súčine $X \times Y$. Podobne ako v iných modeloch teórie hier, hodnoty tejto funkcie nazývame platbami. V literatúre sa modely typu (1.4) nazývajú aj hrami proti prírode a indiferentný účastník, správajúci sa ako náhodný mechanizmus sa nazýva zjednodušene prírodou.

Definícia optimálneho rozhodovania racionálneho účastníka v modeli (1.4)

[1] Upozorňujeme na určitú nedôslednosť v používaní matematickej symboliky v nasledujúcom texte, vynútenú zložitosťou modelov teórie hier. Napríklad v hrách dvoch hráčov množiny stratégií hráčov označujeme symbolmi X a Y, hoci tieto symboly sme v modeli (1.1) použili v inom zmysle. V záujme prehľadnosti zápisu jednotlivých modelov pripúšťame podobnú nedôslednosť aj v iných prípadoch. V každom prípade však význam príslušného symbolu pred jeho použitím definujeme.

závisí predovšetkým od jeho informovanosti o výskyte stavov $\boldsymbol{y} \in Y$ indiferentného účastníka. Predpokladáme, že indiferentný účastník sa prejavuje ako náhodný mechanizmus, t.j. „vyberá" stavy množiny Y podľa nejakého pravdepodobnostného rozdelenia $p(\boldsymbol{y})$. Ak racionálny účastník pozná toto pravdepodobnostné rozdelenie, nazývame model (1.4) *úlohou rozhodovania za rizika*. Ak racionálny účastník nepozná pravdepodobnostné rozdelenie $p(\boldsymbol{y})$, hovoríme o *úlohe rozhodovania za neurčitosti*.

Definícia optimálnosti v úlohe rozhodovania za rizika nespôsobuje nijaké problémy. Za optimálny pokladáme taký variant $x \in X$ racionálneho účastníka, ktorý maximalizuje strednú hodnotu jeho platby. V tomto zmysle sú úlohy rozhodovania za rizika aj predmetom stochastického programovania.

V úlohách rozhodovania za neurčitosti jednoznačná definícia optimálnosti neexistuje. V závislosti od rôznych predpokladov o subjektívnom prístupe racionálneho hráča k možným výsledkom dostávame viaceré varianty princípu optimálnosti.

Otázkami optimálneho rozhodovania v modeloch typu (1.4) a ich niektorými zovšeobecneniami sa zaoberáme v piatej kapitole.

Nakoniec poznamenávame, že v mnohých reálnych rozhodovacích situáciách sa stretávame s konfliktnosťou rôznych cieľov jedného racionálneho účastníka. Každému zvolenému variantu tohto účastníka je často priradený celý vektor hodnotiacich charakteristík. Napríklad pri ekonomických aplikáciách úloh matematického programovania býva obvykle najväčším problémom výber vhodnej účelovej funkcie. Pri rozhodovaní treba rešpektovať viaceré ekonomické, ako aj sociálne faktory a im zodpovedajúce hodnotiace charakteristiky.

Preto sa v posledných rokoch venuje osobitná pozornosť analýze konfliktných rozhodovacích situácií s vektorovým ohodnotením výsledkov. Najjednoduchší model takej rozhodovacej situácie môžeme zapísať takto:

$$\{P = \{1\};\ X,\ M\} \tag{1.5}$$

kde P sa skladá z jedného racionálneho účastníka, X je množina variantov tohto účastníka a M je jeho vektorová hodnotiaca funkcia definovaná na množine X, t.j.

$$M(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} M_1(\boldsymbol{x}) \\ M_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ M_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že racionálny účastník sa usiluje v určitom zmysle súčasne maximalizovať všetky funkcie $M_p(\boldsymbol{x})$.

Všeobecne nemôžeme očakávať, že existuje variant $\boldsymbol{x}^{(0)} \in X$, pre ktorý platí

$$M_p(\boldsymbol{x}^{(0)}) \geqq M_p(\boldsymbol{x})$$

pre všetky $p = 1, 2, \ldots, k$ a pre všetky $\boldsymbol{x} \in X$. Čím viac sa približujeme k maximálnej hodnote jednej z funkcií $M_p(\boldsymbol{x})$, tým ďalej sa môžeme nachádzať od maximálnych hodnôt všetkých alebo niektorých ostatných hodnotiacich charakteristík.

Podobne ako v niektorých iných modeloch konfliktných rozhodovacích situácií, o ktorých sme sa už zmienili, ani v modeli (1.5) nie je k dispozícii jednoznačná a všeobecne prijateľná definícia optimálneho rozhodovania. Minimálnou požiadavkou na „dobré" rozhodnutie v modeli (1.5) je požiadavka vektorovej maximalizácie hodnotiacej funkcie $M(\boldsymbol{x})$ na množine X. Variant $\boldsymbol{x} \in X$, v ktorom funkcia $M(\boldsymbol{x})$ nadobúda vektorové maximum, nemožno v nijakom prípade pokladať za optimálny. Problém je v tom, že môže existovať celá množina kvalitatívne rôznorodých variantov, ktoré maximalizujú funkciu $M(\boldsymbol{x})$ vo vektorovom zmysle. Viacerí autori navrhujú rôzne princípy výberu „optimálnych", alebo lepšie povedané kompromisných variantov z tejto množiny. Väčšina navrhovaných princípov vychádza z terminológie používanej v úlohách viackriteriálnej optimalizácie.

Úlohy viackriteriálnej optimalizácie sú podrobnejšie vysvetlené napríklad v [38], a preto sa nimi nebudeme zaoberať. V šiestej kapitole však opíšeme úlohu rozhodovania v konfliktných situáciách s vektorovým ohodnotením výsledkov ako hru s vektorovou funkciou platieb.

2 KONEČNÉ HRY DVOCH HRÁČOV

Najznámejším a teoreticky *najjednoduchším modelom* konfliktnej rozhodovacej situácie je tzv. konečná hra dvoch hráčov s konštantným súčtom, ktorú nazývame aj *maticovou hrou.* Teória tejto triedy hier bola rozpracovaná ako prvá a má veľa spoločných bodov s teóriou lineárneho programovania. Keďže celý rad zložitejších prístupov a modelov konfliktných rozhodovacích situácií využíva výsledky a poznatky teórie maticových hier, začíname výklad teórie hier touto problematikou.

Realistickejším, avšak teoreticky zložitejším modelom konfliktných rozhodovacích situácií je konečná hra dvoch hráčov s nekonštantným súčtom, nazývaná aj *bimaticová hra.* Úvod do teórie bimaticových hier uvádzame v tejto kapitole ďalej.

Záver druhej kapitoly obsahuje niekoľko ekonomických aplikačných modelov teórie konečných hier dvoch hráčov.

2.1 MATICOVÉ HRY

Maticové hry modelujú konfliktné situácie, v ktorých vystupujú dvaja účastníci (hráči). Každý z hráčov volí nezávisle (bez informácie o voľbe protivníka) jeden z konečného počtu variantov správania (stratégií). Záujmy hráčov sú diametrálne protikladné, t. j. každý zisk jedného z hráčov je sprevádzaný stratou druhého hráča.

2.1.1 Základné pojmy a definície

Označme hráčov prirodzenými číslami 1 a 2 a množiny ich stratégií symbolmi X (pre prvého hráča) a Y (pre druhého hráča). Predpokladajme, že prvý hráč volí nezávisle od voľby protivníka nejakú stratégiu $\mathbf{x} \in X$; analogicky druhý hráč volí nezávisle od voľby protivníka nejakú stratégiu $\mathbf{y} \in Y$. Výsledok hry je daný dvojicou $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$, kde karteziánsky súčin $X \times Y$ je množinou všetkých výsledkov hry. Funkcie platieb prvého, resp. druhého hráča v skúmanej hre označíme $M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, resp. $M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Predpokladáme, že ide o hru s konštantným súčtom, pre ľubovoľný výsledok musí teda platiť

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c$$

kde c je konštanta nezávislá od voľby stratégií. Funkciu platieb jedného z hráčov môžeme preto vyjadriť pomocou funkcie platieb jeho protivníka a konštanty c, napríklad

$$M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c - M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Dohovorme sa, že ďalej budeme skúmať iba funkciu platieb prvého hráča, ktorú označíme jednoducho $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. V prípade potreby odvodíme funkciu platieb druhého hráča ako $c - M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Hrou dvoch hráčov s konštantným súčtom nazývame teda model

$$[P = \{1, 2\};\ X,\ Y,\ M(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ c]$$

kde P je množina hráčov,
X a Y — množiny stratégií hráčov 1 a 2,
$M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — funkcia platieb hráča 1,
c — nejaká konštanta nezávislá od výsledku hry.

Zrejmé je, že hra tohto typu je *nekooperatívna hra.* Zisk jedného z hráčov je vždy sprevádzaný stratou druhého hráča, spoločný postup obidvoch hráčov nemá teda žiadne rozumné opodstatnenie. Takéto hry nazývame aj *antagonistické hry*, pretože záujmy hráčov sú diametrálne protikladné.

Keďže sa zaujímame o konečné hry dvoch hráčov s konštantným súčtom, budeme ďalej predpokladať, že množiny stratégií X a Y sú konečné. V tomto prípade môžeme ich prvky usporiadať pomocou konečného počtu prirodzených čísel. Nech množina X obsahuje m prvkov a množina Y obsahuje n prvkov. Každému prvku množiny X priradíme práve jeden z indexov

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

a každému prvku množiny Y priradíme práve jeden z indexov

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Hodnoty funkcie platieb $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ môžeme potom zapísať do matice

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

typu $m \times n$. Riadky tejto matice zodpovedajú stratégiám $i = 1, 2, \ldots, m$ prvého hráča a jej stĺpce zodpovedajú stratégiám $j = 1, 2, \ldots, n$ druhého hráča. Zložka a_{ij} matice $\mathbf{A}$ udáva platbu prvého hráča pri výsledku hry (i, j). Ak $a_{ij} > 0$, tak platba predstavuje sumu, ktorú prvý hráč inkasuje, ak $a_{ij} < 0$, ide o sumu, ktorú musí prvý hráč zaplatiť. Platba druhého hráča pri výsledku (i, j) sa rovná veličine $c - a_{ij}$.

Maticu $\mathbf{A}$ nazývame *maticou platieb* prvého hráča, alebo jednoducho maticou platieb v konečnej hre dvoch hráčov s konštantným súčtom. Zrejmé je, že maticou platieb druhého hráča bude matica $\mathbf{C} - \mathbf{A}^{(T)}$, kde $\mathbf{C}$ je matica typu $n \times m$, ktorej všetky prvky sa rovnajú konštante c (ako $\mathbf{A}^{(T)}$ označujeme transponovanú maticu k matici $\mathbf{A}$).

Matica platieb $\mathbf{A}$ spolu s konštantou c úplne charakterizuje skúmanú konfliktnú rozhodovaciu situáciu. Z tejto možnosti maticovej reprezentácie konečnej hry dvoch hráčov s konštantným súčtom bol aj odvodený názov *maticová hra*.

Niekedy sa v literatúre maticovou hrou nazýva konečná hra dvoch hráčov s nulovým súčtom platieb, t.j. predpokladá sa, že $c = 0$. Tento predpoklad neobmedzuje všeobecnosť teoretických úvah; neskôr ukážeme, že veľkosť konštanty c nemení vlastnosti skúmanej hry. Keďže však v celom rade konkrétnych modelov má konštanta c svoju reálnu interpretáciu, budeme vychádzať zo všeobecnej definície maticovej hry ako konečnej hry dvoch hráčov s konštantným (teda aj nenulovým) súčtom platieb.

Na vysvetlenie uvedieme tri jednoduché príklady maticových hier.

Príklad 2.1

Preskúmame nasledujúcu hru s kartami: každý z dvoch hráčov dostane dve karty; prvý hráč čiernu 5 a červenú 2, druhý hráč čiernu 5 a červenú 3. Na pokyn rozhodcu ukážu hráči jednu zo svojich kariet. Ak sú obidve karty rovnakej farby, zaplatí druhý hráč prvému sumu, ktorá sa rovná absolútnej hodnote rozdielu hodnôt týchto kariet. V opačnom prípade inkasuje hráč, ktorý ukázal kartu vyššej hodnoty od protivníka sumu, ktorá sa rovná súčtu hodnôt zvolených kariet.

Zostavíme model tejto konfliktnej situácie. Každý z hráčov má dve stratégie.
Stratégie prvého hráča sú
$i = 1$ zvoliť čiernu 5, $i = 2$ zvoliť červenú 2
Stratégie druhého hráča sú
$j = 1$ zvoliť čiernu 5, $j = 2$ zvoliť červenú 3
Platby prvého hráča pri jednotlivých výsledkoch (i, j) sú

(1, 1)	0
(1, 2)	8
(2, 1)	−7
(2, 2)	1

Platby druhého hráča pri jednotlivých výsledkoch (i, j) sú

(1, 1)	0
(1, 2)	−8
(2, 1)	7
(2, 2)	−1

Vidíme, že ide o typickú konečnú hru dvoch hráčov s konštantným (v danom prípade nulovým) súčtom platieb, teda maticovú hru s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

a konštantou $c = 0$.

Príklad 2.2

Každý z dvoch hráčov ukáže jeden alebo dva prsty. Ak je celkový počet ukázaných prstov párne číslo, tak druhý hráč zaplatí prvému hráčovi sumu, rovnajúcu sa tomuto číslu. V opačnom prípade inkasuje príslušnú sumu druhý hráč od prvého hráča.

Stratégie prvého hráča sú:
$i = 1$ ukázať 1 prst, $i = 2$ ukázať 2 prsty
Stratégie druhého hráča sú:
$j = 1$ ukázať 1 prst, $j = 2$ ukázať 2 prsty
Zrejmé je, že ide o maticovú hru s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a konštantou $c = 0$.

Príklad 2.3

Predpokladajme, že podnik zahraničného obchodu (prvý hráč) chce preniknúť na trhy ovládané inou firmou (druhý hráč). Tieto trhy označíme indexom $i = 1, 2, \ldots, n$. Nech s_i je objem objednávok na i-tom trhu. Bez obmedzenia všeobecnosti môžeme predpokladať, že trhy sú očíslované tak, že platí

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_n > 0$$

Všetky objednávky doteraz kontrolovala konkurenčná firma. Ak sa chce podnik uplatniť na niektorom z týchto trhov, musí vykonať príslušnú propagačnú kampaň. Predpokladáme, že aj konkurenčná firma chce vykonaním propagačnej kampane, ktorou bude čeliť propagačnej kampani nášho podniku, chrániť svoje záujmy na ňou kontrolovaných trhoch. Tak náš podnik, ako aj konkurenčná firma majú ohraničené prostriedky na propagáciu, takže propagačnú kampaň môžu vykonať iba na jednom z trhov.

V prípade, že náš podnik vykoná propagačnú kampaň na i-tom trhu a konkurenčná firma na tomto trhu kampaň nerealizuje, potom celkový objem objednávok s_i získa náš podnik. Ak sa na i-tom trhu stretnú propagačné kampane obidvoch konkurentov, potom náš podnik získa $p \,.\, s_i$ objednávok a konkurenčná firma si zachová $(1 - p) s_i$ objednávok, kde číslo p udáva efektívnosť kampane nášho podniku, pričom $0 < p < 1$. Ak na i-tom trhu nevykoná propagačnú kampaň ani jeden z konkurentov, tak všetky objednávky s_i si zachová konkurenčná firma, ktorá tento trh kontrolovala už v minulosti. Rovnaký efekt má propagačná kampaň na i-tom trhu, ak na tomto trhu nevykoná propagačnú kampaň náš podnik.

Náš podnik sa chce rozhodnúť, na ktorom trhu je pre neho najvýhodnejšie uskutočniť propagačnú kampaň a konkurenčná firma, ktorá nevie, kde sa pokúsi náš podnik vstúpiť na trh, rozhoduje o tom, na ktorom trhu bude brániť svoje pozície.

Opísanú rozhodovaciu situáciu možno modelovať ako maticovú hru. Každý z hráčov má n stratégií (stratégiou je propagačná kampaň na jednom z n trhov). Matica platieb má za daných predpokladov tvar

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|c} j=1 \quad j=2 \quad \dots \quad j=n & \\ \hline \begin{pmatrix} ps_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & ps_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & & & \\ s_n & s_n & \dots & ps_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} i=1 \\ i=2 \\ \\ i=n \end{array} \end{array}$$

Ak prvý hráč zvolí i-tú stratégiu a druhý hráč j-tú stratégiu, pričom $i = j$, potom platbou prvého hráča je veličina ps_i a platbou druhého hráča je veličina $-ps_i$ (strata časti v minulosti kontrolovaných objednávok). Ak prvý hráč zvolí i-tu stratégiu a druhý hráč j-tu stratégiu, pričom $i \neq j$, potom platbou prvého hráča je s_i a platbou druhého hráča je $-s_i$ (strata celého objemu v minulosti kontrolovaných objednávok).

2.1.2 Optimálne stratégie

Predpokladajme, že každý z hráčov dokonale pozná model skúmanej konfliktnej situácie, teda maticu platieb **A**. Za inteligentného hráča budeme pokladať takého účastníka konfliktu, ktorý sa usiluje maximalizovať vlastnú platbu a rešpektuje pritom tú skutočnosť, že rovnaký cieľ sleduje aj jeho protivník. Zaujíma nás, aké stratégie sú z hľadiska inteligentných hráčov v maticovej hre najvýhodnejšie (optimálne).

Stratégie $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ budeme ďalej nazývať *čistými stratégiami* prvého a druhého hráča.

Prirodzené je predpokladať, že prvý hráč sa usiluje vhodnou voľbou čistej stratégie dosiahnuť čo možno najvyššiu platbu a_{ij}; nazývame ho preto maximalizujúcim hráčom. Analogicky, druhý hráč sa usiluje vhodnou voľbou svojej čistej stratégie maximalizovať svoju platbu $c - a_{ij}$, čo je to isté, ako minimalizovať platbu a_{ij} prvého hráča; nazývame ho preto minimalizujúcim hráčom.

Nech prvý hráč zvolí i-tu čistú stratégiu, potom si môže s určitosťou zabezpečiť, že jeho platba bude aspoň

$$\min_j a_{ij}$$

Vzhľadom na to, že si chce zabezpečiť čo možno najvyššiu platbu, uvažuje o voľbe čistej stratégie tak, aby táto veličina bola maximálna, teda, aby si zabezpečil aspoň

$$\max_i \min_j a_{ij} \tag{2.1}$$

Nech druhý hráč zvolí j-tu čistú stratégiu, potom vie, že platba prvého hráča nebude vyššia ako

$$\max_i a_{ij}$$

Vzhľadom na to, že minimalizuje túto veličinu, uvažuje o voľbe čistej stratégie tak, aby platba prvého hráča neprevýšila

$$\min_j \max_i a_{ij} \tag{2.2}$$

Vidíme, že vhodnou voľbou čistej stratégie si môže prvý hráč zabezpečiť, že jeho platba nebude nižšia ako (2.1), pričom druhý hráč mu môže vhodnou voľbou čistej stratégie znemožniť, aby jeho platba bola vyššia ako (2.2). Skôr ako sa budeme zaoberať ďalšou analýzou správania inteligentných hráčov v maticovej hre, zavedieme pojem sedlového bodu.

Definícia 2.1

Nech funkcia $f(x, y)$ je reálna funkcia, definovaná pre $x \in X$ a $y \in Y$. Sedlovým bodom tejto funkcie vzhľadom na množinu $X \times Y$ nazývame taký bod $(x_0, y_0) \in X \times Y$, že pre všetky $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y)$$

V ďalších úvahách použijeme nasledujúce dve vlastnosti reálnych funkcií:

Veta 2.1

Nech $f(x, y)$ je reálna funkcia definovaná pre $x \in X$ a $y \in Y$ a nech existujú veličiny

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

a

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

Potom platí

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) \tag{2.3}$$

Dôkaz: Z definície minima a maxima vieme, že pre ľubovoľné fixované $x\in X$ platí

$$\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq f(x, y)$$

a pre ľubovoľné fixované $y\in Y$ platí

$$f(x, y) \leqq \max_{x\in X} f(x, y)$$

Preto

$$\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq \max_{x\in X} f(x, y) \tag{2.4}$$

Vzhľadom na to, že ľavá strana nerovnosti (2.4) nezávisí od y, platí

$$\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) \tag{2.5}$$

Pravá strana nerovnosti (2.5) nezávisí od x, preto

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y)$$

teda platí (2.3).

Veta 2.2

Nech sú splnené predpoklady vety 2.1, potom funkcia $f(x, y)$ má sedlový bod vzhľadom na množinu $X\times Y$ práve vtedy, ak platí

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) \tag{2.6}$$

Ak (x_0, y_0) je sedlový bod funkcie $f(x, y)$ vzhľadom na množinu $X\times Y$, potom platí

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{2.7}$$

Dôkaz:
I. Nech $(x_0, y_0)\in X\times Y$ je sedlový bod funkcie $f(x, y)$, potom podľa definície 2.1 pre všetky $x\in X$ a $y\in Y$ platí

$$f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y)$$

Z toho vyplýva, že

$$\max_{x\in X} f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0) \leqq \min_{y\in Y} f(x_0, y)$$

Vzhľadom na to, že

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) \leqq \max_{x\in X} f(x, y_0)$$

a

$$\min_{y\in Y} f(x_0, y) \leqq \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y)$$

platí

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) \leqq f(x_0, y_0) \leqq \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) \tag{2.8}$$

Avšak podľa vety 2.1 máme

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) \leqq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y)$$

preto vo vzťahu (2.8) musí v obidvoch častiach platiť rovnosť. Teda

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = f(x_0, y_0) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y)$$

a platí (2.6). Zároveň sme dokázali vzťah (2.7).

II. Nech je splnená rovnosť (2.6). Nech ďalej v bode $x_0\in X$ funkcia

$$\min_{y\in Y} f(x, y)$$

nadobúda maximálnu hodnotu a v bode $y_0\in Y$ funkcia

$$\max_{x\in X} f(x, y)$$

nadobúda minimálnu hodnotu, t. j.

$$\min_{y\in Y} f(x_0, y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y)$$

$$\max_{x\in X} f(x, y_0) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y)$$

Ukážeme, že dvojica $(x_0, y_0)\in X\times Y$ je sedlovým bodom funkcie $f(x, y)$. Na základe predpokladu o splnení rovnosti (2.6) dostaneme

$$\min_{y\in Y} f(x_0, y) = \max_{x\in X} f(x, y_0) \tag{2.9}$$

Z definície minima vyplýva

$$\min_{y\in Y} f(x_0, y) \leqq f(x_0, y_0)$$

Odtiaľ na základe (2.9) dostávame

$$\max_{x\in X} f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0)$$

teda

$$f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0) \tag{2.10}$$

pre všetky $x \in X$. Analogicky, z definície maxima vyplýva

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) \geqq f(x_0, y_0)$$

Na základe (2.9) preto platí

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \geqq f(x_0, y_0)$$

teda

$$f(x_0, y) \geqq f(x_0, y_0) \tag{2.11}$$

Z porovnania vzťahov (2.10) a (2.11) s definíciou 2.1 vyplýva, že (x_0, y_0) je sedlový bod funkcie $f(x, y)$ vzhľadom na množinu $X \times Y$.

Tým je veta dokázaná.

Maticu platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ môžeme pokladať za diskrétnu reálnu funkciu dvoch premenných

$$f(i, j) = a_{ij}$$

Vzhľadom na to, že pre takúto funkciu vždy existuje príslušné max min a min max, podľa vety 2.1 platí:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij}$$

Poznamenajme, že tento vzťah je intuitívne zrejmý — najnižšia platba, ktorú si prvý hráč môže zabezpečiť voľbou vhodnej čistej stratégie, nemôže prevýšiť najvyššiu platbu, ktorej prekročenie mu môže druhý hráč znemožniť.

V súlade s definíciou 2.1 nazývame *sedlovým bodom matice* $\mathbf{A}$ takú dvojicu indexov (i_0, j_0), že pre všetky i a j platí

$$a_{ij_0} \leqq a_{i_0j_0} \leqq a_{i_0j}$$

t. j. $a_{i_0j_0}$ je minimálny prvok vo svojom riadku a maximálny prvok vo svojom stĺpci.

Z vety 2.2 vieme, že sedlový bod matice $\mathbf{A}$ existuje práve vtedy, ak platí

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \tag{2.12}$$

t. j. ak maximálne riadkové minimum matice $\mathbf{A}$ sa rovná minimálnemu stĺpcovému maximu tejto matice. Ak (i_0, j_0) je sedlový bod matice $\mathbf{A}$, potom

$$\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij} = a_{i_0j_0}$$

Zo vzťahu (2.12) je zrejmé, že voľba čistej stratégie i_0 zo sedlového bodu matice platieb $\mathbf{A}$ zabezpečí prvému hráčovi, že jeho platba nebude nižšia ako $a_{i_0j_0}$. Ak prvý hráč zvolí inú čistú stratégiu, môže sa jeho platba znížiť. Analogicky, ak druhý hráč zvolí „svoju" čistú stratégiu j_0 zo sedlového bodu matice $\mathbf{A}$, potom platba prvého hráča nemôže byť vyššia ako $a_{i_0j_0}$. Ak druhý hráč zvolí inú čistú stratégiu, môže sa platba prvého hráča zvýšiť. Za predpokladu, že hráči nechcú riskovať, určuje teda sedlový bod matice platieb najlepší spôsob rozhodovania v maticovej hre.

Definícia 2.2

Také stratégie i_0, j_0, že (i_0, j_0) je sedlový bod matice platieb $\mathbf{A}$, nazývame *čistými optimálnymi stratégiami* prvého a druhého hráča v maticovej hre. Číslo

$$v = a_{i_0j_0}$$

nazývame *hodnotou* tejto hry. Trojicu

$$\{i_0, j_0, v\}$$

nazývame *riešením maticovej hry* v čistých stratégiách.

Analýzu každej maticovej hry začíname tým, že preskúmame, či existuje sedlový bod matice platieb, t. j. či existuje riešenie hry v čistých stratégiách.

Príklad 2.4

Analyzujme hru z príkladu 2.1. Určíme riadkové minimá a stĺpcové maximá matice platieb:

			riadkové minimá
	0	8	0
	−7	1	−7
stĺpcové maximá	0	8	

Vidíme, že maximálne riadkové minimum

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{11} = 0$$

a minimálne stĺpcové maximum

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{11} = 0$$

Matica platieb má teda sedlový bod a čistými optimálnymi stratégiami hráčov sú $i_0 = 1$ (t. j. prvý hráč volí čiernu 5) a $j_0 = 1$ (t. j. druhý hráč volí čiernu 5). Hodnota hry $v = 0$. Odchýlenie sa od optimálnych stratégií je pre obidvoch hráčov spojené s rizikom straty.

Príklad 2.5

Analyzujme podobným spôsobom hru z príkladu 2.2.

2	-3	-3
-3	4	-3
2	4	

Vidíme, že

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{12} = a_{21} = -3$$

a

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{11} = 2$$

Matica platieb skúmanej hry nemá teda sedlový bod. Voľbou ktorejkoľvek čistej stratégie si prvý hráč zabezpečí, že jeho platba nebude nižšia ako -3, voľbou čistej stratégie $j = 1$ mu druhý hráč zabráni, aby jeho platba bola vyššia ako 2. Rozdiel medzi týmito veličinami, t. j. medzi dolnou garantovanou a hornou možnou hranicou platby prvého hráča, ponecháva priestor na ďalšie úvahy o optimálnom spôsobe hry.

Z príkladu 2.5 vidíme, že existujú maticové hry, ktoré nemajú riešenie v čistých stratégiách. Takýto prípad je pritom častejší ako prípad existencie sedlového bodu matice platieb; pre väčšinu matíc totiž platí

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

Pre väčšiu názornosť ďalších úvah predpokladajme, že hra sa mnohokrát opakuje. Každé opakovanie nazveme *partiou hry*.

Nech matica platieb nemá sedlový bod. Všeobecne možno očakávať, že prvý hráč sa v tomto prípade bude usilovať vhodným striedaním čistých stratégií v jednotlivých partiách o to, aby si v priemere na jednu partiu zabezpečil vyššiu platbu ako $\max_i \min_j a_{ij}$, pričom druhý hráč sa bude usilovať o to, aby vhodným striedaním svojich čistých stratégií znížil priemernú platbu prvého hráča na jednu partiu pod úroveň $\min_i \max_j a_{ij}$. Striedanie stratégií musí pritom každý hráč organizovať tak, aby jeho protivník nebol schopný odhaliť, ktorú z čistých stratégií zvolí v konkrétnej partii. V opačnom prípade by totiž protivník vhodnou voľbou čistej stratégie maximalizoval svoju platbu proti známej čistej stratégii súpera a striedanie čistých stratégií by nemalo žiadúci efekt.

Uvedený spôsob hry sa realizuje tak, že namiesto voľby nejakej konkrétnej čistej stratégie priraďuje hráč každej svojej čistej stratégii určitú pravdepodobnosť; s touto pravdepodobnosťou bude príslušnú čistú stratégiu voliť vhodný náhodný mechanizmus. Voľba čistej stratégie bude potom náhodným javom.

Hráč určí pravdepodobnostné rozdelenie na množine čistých stratégií a ponechá voľbu čistej stratégie náhodnému mechanizmu, fungujúcemu podľa príslušného rozdelenia. Toto pravdepodobnostné rozdelenie nazývame *zmiešaná stratégia*.

Uvedieme príklad jednoduchého *náhodného mechanizmu*. Predpokladajme, že hráč chce striedať svoje dve čisté stratégie v pomere 1 : 2, a to náhodným spôsobom. S týmto cieľom môže použiť hraciu kocku. Ak padne číslo 1 alebo 2, volí prvú čistú stratégiu (pravdepodobnosť 1/3), ak padne číslo väčšie ako 2, volí druhú čistú stratégiu (pravdepodobnosť 2/3).

Definícia 2.3

Zmiešanou stratégiou prvého hráča nazývame m-rozmerný vektor

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

taký, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \qquad x_i \geqq 0$$

Zmiešanou stratégiou druhého hráča nazývame n-rozmerný vektor

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

taký, že platí

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \qquad y_j \geqq 0$$

Množiny

$$S_m = \left\{x \in E_m, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geqq 0\right\}$$

resp.

$$S_n = \left\{y \in E_n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \geqq 0\right\}$$

budeme nazývať množinami zmiešaných stratégií prvého, resp. druhého hráča.

Poznámka 2.1

1. Množinu

$$S_k = \left\{z \in E_k, \ \sum_{i=1}^{k} z_i = 1, \ z_i \geqq 0\right\}$$

nazývame jednotkovým simplexom v k-rozmernom euklidovskom priestore. S_k je konvexný polyéder dimenzie $k - 1$, ktorý má práve k krajných bodov. Jeho krajnými bodmi sú všetky k-rozmerné jednotkové vektory.

2. Čistú stratégiu môžeme pokladať za špeciálny prípad zmiešanej stratégie. Napríklad i-tu čistú stratégiu prvého hráča môžeme zapísať ako jednotkový vektor

$$x = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

s jednotkou na i-tom mieste (hráč volí i-tu čistú stratégiu s pravdepodobnosťou 1 a ostatné čisté stratégie s pravdepodobnosťou 0). V tejto súvislosti budeme o čistých stratégiách niekedy hovoriť ako o jednotkových zmiešaných stratégiách. Všimnime si, že čisté stratégie v tomto chápaní sú krajnými bodmi polyédra zmiešaných stratégií.

Nech prvý hráč zvolí nejakú zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x} \in S_m$ a druhý hráč zvolí nejakú zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{y} \in S_n$. Keďže voľby čistých stratégií pomocou náhodného mechanizmu podľa pravdepodobnostných rozdelení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ sú nezávislé náhodné javy, súčin x_i, y_j udáva pravdepodobnosť toho, že výsledkom partie bude (i, j). Veličina

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

udáva strednú hodnotu platby prvého hráča pri zmiešaných stratégiách $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ obidvoch hráčov.

Definícia 2.4

Funkciu

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \boldsymbol{x}^{(T)} \mathbf{A} \boldsymbol{y}$$

definovanú pre $\boldsymbol{x} \in S_m$ a $\boldsymbol{y} \in S_n$ nazývame *funkcia strednej hodnoty platby* v maticovej hre.

Poznámka 2.2

1. Funkcia $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ udáva strednú hodnotu platby prvého hráča. Stredná hodnota platby druhého hráča v maticovej hre je $c - E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde c je konštantný súčet platieb.

2. Pre každé $\boldsymbol{x} \in S_m$ a $\boldsymbol{y} \in S_n$ udáva veličina $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ približnú priemernú platbu prvého hráča na jednu partiu za predpokladu realizácie veľkého počtu partií s týmito zmiešanými stratégiami. Všetky naše úvahy môžeme aplikovať aj vtedy, keď sa realizuje jediná partia. V takomto prípade je však veličina $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ iba pravdepodobnostnou charakteristikou a obvykle nezodpovedá skutočnej platbe po realizácii partie hry.

3. Ako

$$E(\boldsymbol{x}, j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

budeme ďalej označovať strednú hodnotu platby prvého hráča pri jeho zmiešanej stratégii $\boldsymbol{x} \in S_m$ a pri čistej stratégii j druhého hráča. Analogicky ako

$$E(i, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

označíme strednú hodnotu platby prvého hráča pri jeho i-tej čistej stratégii a zmiešanej stratégii $\boldsymbol{y} \in S_n$ druhého hráča. Zrejmé je, že platí

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j E(\boldsymbol{x}, j) = \sum_{i=1}^{m} x_i E(i, \boldsymbol{y})$$

4. Prvky matice platieb $\mathbf{A}$ sú hodnotami funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pri jednotkových zmiešaných stratégiách (t. j. pri čistých stratégiách) obidvoch hráčov. Môžeme zapísať

$$E(i, j) = a_{ij}$$

Úvahy o optimálnom spôsobe hry v čistých stratégiách môžeme teraz zovšeobecniť pre zmiešané stratégie. Prvý hráč si môže vhodnou voľbou zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x} \in S_m$ zabezpečiť, že stredná hodnota jeho platby nebude nižšia ako

$$\max_{\boldsymbol{x} \in S_m} \min_{\boldsymbol{y} \in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.13}$$

pričom druhý môže svoju zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{y} \in S_n$ zvoliť tak, aby stredná hodnota platby prvého hráča nebola vyššia ako

$$\min_{\boldsymbol{y} \in S_n} \max_{\boldsymbol{x} \in S_m} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.14}$$

Keďže funkcia $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ je bilineárna a množiny S_m, S_n sú ohraničené a uzatvorené, možno dokázať, že veličiny (2.13) a (2.14) existujú. Z vety 2.1 potom vyplýva, že

$$\max_{\boldsymbol{x} \in S_m} \min_{\boldsymbol{y} \in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \min_{\boldsymbol{y} \in S_n} \max_{\boldsymbol{x} \in S_m} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.15}$$

Ak vo vzťahu (2.15) platí rovnosť, t. j.

$$\max_{\boldsymbol{x} \in S_m} \min_{\boldsymbol{y} \in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{y} \in S_n} \max_{\boldsymbol{x} \in S_m} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = v \tag{2.16}$$

potom podľa vety 2.2 existuje sedlový bod $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$ funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na $S_m \times S_n$. Voľbou zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x}^{(0)}$ zo sedlového bodu si prvý hráč zabezpečí, že stredná hodnota jeho platby nebude nižšia ako v; ak zvolí inú zmiešanú stratégiu, riskuje, že sa stredná hodnota jeho platby zníži. Analogicky, voľbou zmiešanej stratégie $\boldsymbol{y}^{(0)}$ zo sedlového bodu druhý hráč znemožní, aby stredná hodnota platby prvého hráča bola vyššia ako v; ak druhý hráč zvolí inú zmiešanú stratégiu, môže sa stredná hodnota platby prvého hráča zvýšiť. Vidíme teda, že rovnosť (2.16), resp. existencia sedlového bodu funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ určuje optimálny spôsob hry so zmiešanými stratégiami.

Uvedené chápanie optimálneho spôsobu hry (či už v čistých, alebo v zmiešaných stratégiách) sa obvykle nazýva *minmaxový princíp* voľby stratégií.

Definícia 2.5

Nech $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$ je sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na $S_m \times S_n$. Vektory $\boldsymbol{x}^{(0)}$, resp. $\boldsymbol{y}^{(0)}$ nazývame *zmiešané optimálne stratégie* prvého, resp. druhého hráča v príslušnej maticovej hre a číslo

$$v = E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

nazývame *hodnota* tejto hry. Trojicu

$$\{\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}, v\}$$

nazývame *riešenie maticovej hry v zmiešaných stratégiách.*

Riešenie maticovej hry v čistých stratégiách je špeciálnym prípadom riešenia v zmiešaných stratégiách. Ľahko sa presvedčíme o tom, že jednotkové zmiešané stratégie, zodpovedajúce čistým optimálnym stratégiám i_0, j_0 v maticovej hre, tvoria sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

2.1.3 Základná veta teórie maticových hier

Vieme už, že nie každá maticová hra má riešenie v čistých stratégiách. Celkom prirodzene vzniká otázka, či vždy existuje riešenie maticovej hry v zmiešaných stratégiách.

Zavedenie pojmu zmiešaná stratégia umožnilo J. von NEUMANNOVI dokázať základnú vetu teórie maticových hier, známu v literatúre aj pod názvom veta o minmaxe.

Veta 2.3

Pre každú maticovú hru platí

$$\max_{\boldsymbol{x}\in S_m} \min_{\boldsymbol{y}\in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{y}\in S_n} \max_{\boldsymbol{x}\in S_m} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.17}$$

Z vety 2.3 a z tvrdenia vety 2.2 vyplýva, že pre každú maticovú hru existuje sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na množinu

$$S_m \times S_n$$

teda v zmysle definície 2.5 má každá maticová hra riešenie v zmiešaných stratégiách.

Dôkaz vety 2.3: Funkcia $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ je spojitá podľa $\boldsymbol{y}$, preto pre každé $\boldsymbol{x}$ existuje

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Táto funkcia je spojitá podľa $\boldsymbol{x}$, preto existuje

$$\max_{\boldsymbol{x}\in S_m} \min_{\boldsymbol{y}\in S_n} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Na základe analogickej úvahy možno ukázať, že existuje

$$\min_{\boldsymbol{y}\in S_n} \max_{\boldsymbol{x}\in S_m} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

a sú teda splnené predpoklady vety 2.2.

Z vety 2.2 vieme, že rovnosť (2.17) je splnená práve vtedy, ak existuje sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na $S_m \times S_n$. Stačí teda dokázať existenciu tohto sedlového bodu.

Majme maticovú hru s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Preskúmajme nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

Maximalizovať w
za podmienok

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + w &\leqq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\ x_i &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Minimalizovať u
za podmienok

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + u &\geqq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\ y_j &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Koeficienty a_{ij} v sústavách ohraničení úloh (2.18) a (2.19) sú prvky matice platieb $\mathbf{A}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, w sú premenné v úlohe (2.18) a $y_1, y_2, \ldots, y_n$, u sú premenné v úlohe (2.19).

Úlohy (2.18) a (2.19) sú navzájom duálne úlohy lineárneho programovania. Ľahko sa presvedčíme o tom, že množiny prípustných riešení týchto úloh nie sú prázdne. Podľa teórie duality lineárneho programovania z toho vyplýva, že obidve úlohy majú konečné optimálne riešenie.

Nech $(\boldsymbol{x}^{(0)}, w^{(0)})$, resp. $(\boldsymbol{y}^{(0)}, u^{(0)})$ sú optimálne riešenia úlohy (2.18), resp. (2.19). Dokážeme, že

a) $w^{(0)} = u^{(0)} = E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$,

b) zložky $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{y}^{(0)}$ týchto optimálnych riešení tvoria sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na $S_m \times S_n$.

Z teórie duality lineárneho programovania vieme, že optimálne hodnoty účelových funkcií dvojice riešiteľných duálnych úloh sú rovnaké, teda $u^{(0)} = w^{(0)}$. Pre úlohu (4.18) platí:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^{(0)} \geqq w^{(0)} \tag{2.20}$$

a pre úlohu (2.19) platí:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^{(0)} \leqq u^{(0)} \tag{2.21}$$

Vzťah (2.20) vynásobíme zodpovedajúcimi zložkami $y_j^{(0)}$ vektora $\boldsymbol{y}^{(0)}$ a spočítame; nerovnosti (2.21) vynásobíme zodpovedajúcimi zložkami $x_i^{(0)}$ vektora $\boldsymbol{x}^{(0)}$ a spočítame. Dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^{(0)}y_j^{(0)} \geqq w^{(0)} \sum_{j=1}^{n} y_j^{(0)} = w^{(0)}$$

teda

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \geqq w^{(0)} \tag{2.22}$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^{(0)}y_j^{(0)} \leqq u^{(0)} \sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} = u^{(0)}$$

teda

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leqq u^{(0)} \tag{2.23}$$

Keďže $w^{(0)} = u^{(0)}$, zo vzťahov (2.22) a (2.23) vyplýva, že

$$w^{(0)} = u^{(0)} = E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

čo dokazuje tvrdenie a).

Dokážeme ďalej tvrdenie b). Vieme, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^{(0)} \geqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \tag{2.24}$$

resp.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^{(0)} \leqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \tag{2.25}$$

Vzťah (2.24) vynásobíme príslušnými zložkami y_j ľubovoľnej zmiešanej stratégie $\boldsymbol{y} \in S_n$ a spočítame; nerovnosti (2.25) vynásobíme príslušnými zložkami x_i ľubovoľnej zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x} \in S_m$ a spočítame. Dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^{(0)}y_j \geqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \sum_{j=1}^{n} y_j = E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

teda pre ľubovoľné $\boldsymbol{y} \in S_n$ platí:

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}) \geqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \tag{2.26}$$

Analogicky

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j^{(0)} \leqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \sum_{i=1}^{m} x_i = E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

teda pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in S_m$ platí

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \tag{2.27}$$

Ak porovnáme vzťahy (2.26) a (2.27) s definíciou 2.1, zistíme, že dvojica $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$ je sedlovým bodom funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na množinu $S_m \times S_n$.

Pre dôkaz vety o minmaxe stačilo ukázať, že úlohy (2.18) a (2.19) sú riešiteľné a že ich optimálne riešenia určujú nejaký sedlový bod funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na množinu $S_m \times S_n$. Sedlový bod však nemusí byť určený jednoznačne, t. j. funkcia $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ môže mať celú množinu sedlových bodov. Ľahko možno dokázať aj tvrdenie o tom, že každému sedlovému bodu funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na $S_m \times S_n$ zodpovedá nejaká dvojica optimálnych riešení úloh (2.18) a (2.19). Existuje teda navzájom jednoznačné priradenie medzi všetkými dvojicami optimálnych riešení úloh (2.18) a (2.19) a všetkými riešeniami maticovej hry v zmiešaných stratégiách.

Poznamenajme v tejto súvislosti, že ak hovoríme o nejednoznačnosti riešenia maticovej hry, máme na zreteli iba nejednoznačnosť optimálnych stratégií hráčov. Z definície hodnoty hry, resp. z vety 2.2 je zrejmé, že pre rôzne riešenia je hodnota hry rovnaká.

2.1.4 Vlastnosti optimálnych stratégií

Z dôkazu vety 2.3 vyplýva celý rad poznatkov o vlastnostiach riešení maticovej hry. Sformulujeme najdôležitejšie z nich.

Veta 2.4

Vektory $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$ a $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ sú optimálne zmiešané stratégie prvého a druhého hráča v maticovej hre práve vtedy, ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ a pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$E(i, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leqq E(\boldsymbol{x}^{(0)}, j)$$

Veta 2.5

Nech v je hodnota maticovej hry. Potom

a) vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$ je optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča práve vtedy, ak pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, j) \geqq v$$

b) vektor $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ je optimálna zmiešaná stratégia druhého hráča práve vtedy, ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$E(i, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leqq v$$

Veta 2.6

Nech $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$, resp. $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ je optimálna zmiešaná stratégia prvého, resp. druhého hráča v maticovej hre. Potom pre hodnotu hry v platí

$$v = \min_j E(\boldsymbol{x}^{(0)}, j) = \max_i E(i, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

Veta 2.7

Nech trojica $\{\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}, v\}$ je riešenie maticovej hry v zmiešaných stratégiách. Potom

a) pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$y_j^{(0)}[E(\boldsymbol{x}^{(0)}, j) - v] = 0$$

b) pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$x_i^{(0)}[E(i, \boldsymbol{y}^{(0)}) - v] = 0$$

Poznámka 2.3

1. Dôkazy viet 2.4 až 2.7 môžeme získať rozborom vzťahov medzi úlohami (2.18) a (2.19) z odseku 2.1.3, využívajúc pritom teóriu duality lineárneho programovania.

2. Vlastnosti optimálnych stratégií, sformulované vo vetách 2.4 až 2.7, môžeme s výhodou využiť pri analýze maticových hier. Na základe vety 2.4 môžeme pre ľubovoľnú dvojicu zmiešaných stratégií prvého a druhého hráča overiť, či ide o optimálne zmiešané stratégie. Ak poznáme hodnotu hry v, môžeme podľa vety 2.5 pre ľubovoľnú zmiešanú stratégiu určiť, či je, alebo nie je optimálna. Ak poznáme optimálnu zmiešanú stratégiu jedného z hráčov, môžeme na základe vety 2.6 určiť hodnotu hry. Veta 2.7 nám umožňuje na základe znalosti optimálnej zmiešanej stratégie jedného z hráčov odvodiť optimálnu zmiešanú stratégiu protivníka.

Uvedieme jednu z možností využitia vlastností optimálnych stratégií pri analýze maticovej hry.

Príklad 2.6

Preskúmame hru s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Optimálnou zmiešanou stratégiou prvého hráča v tejto hre je vektor

$$\boldsymbol{x}^0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Na základe tejto informácie určíme hodnotu hry a optimálnu zmiešanú stratégiu druhého hráča.

Podľa vety 2.6 hodnota hry

$$v = \min_j E(\boldsymbol{x}^{(0)}, j)$$

Určíme

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 1) = 1\left(\frac{3}{5}\right) + 0\left(\frac{2}{5}\right) - 2 \,.\, 0 = \frac{3}{5}$$

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 2) = 3\left(\frac{3}{5}\right) - 1\left(\frac{2}{5}\right) + 3 \,.\, 0 = \frac{7}{5}$$

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 3) = -1\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{2}{5}\right) - 1 \,.\, 0 = \frac{3}{5}$$

Vidíme, že

$$v = \min\left\{\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$$

Určíme ďalej optimálnu stratégiu $\boldsymbol{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)})$ druhého hráča. Podľa vety 2.7 s prihliadnutím na vetu 2.5 platí

$$x_1^{(0)} > 0 \to E(1, \boldsymbol{y}^{(0)}) = v$$

$$x_2^{(0)} > 0 \to E(2, \boldsymbol{y}^{(0)}) = v$$

$$x_3^{(0)} = 0 \to E(3, \boldsymbol{y}^{(0)}) \leqq v$$

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 1) = v \to y_1^{(0)} \geqq 0$$

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 2) > v \to y_2^{(0)} = 0$$

$$E(\boldsymbol{x}^{(0)}, 3) = v \to y_3^{(0)} \geqq 0$$

Zložky $y_1^{(0)}$ a $y_3^{(0)}$ optimálnej stratégie druhého hráča sú preto nezáporné riešenia systému lineárnych rovníc

$$y_1 + y_3 = 1$$

$$y_1 - y_3 = \frac{3}{5} \qquad (2.28)$$

$$3y_3 = \frac{3}{5}$$

ktoré vyhovujú nerovnici

$$-2y_1 - y_3 \leqq \frac{3}{5} \qquad (2.29)$$

Poznamenávame, že zložka $y_2^{(0)}$ optimálnej stratégie druhého hráča je vždy nulová.

Systém lineárnych rovníc (2.28) má jednoznačné riešenie

$$y_1^{(0)} = \frac{4}{5}, \; y_3^{(0)} = \frac{1}{5}$$

ktoré zrejme vyhovuje nerovnici (2.29). Optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča v skúmanej hre je teda vektor

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$$

Poznamenávame, že správnosť získaného výsledku možno overiť na základe vety 2.4.

Preskúmame teraz ďalšiu užitočnú vlastnosť optimálnych stratégií v maticových hrách, nazývanú aj vlastnosť *dominácie stratégií.*

Majme maticovú hru H s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Ukážeme, že za určitých podmienok môžeme odvodiť riešenie tejto hry z riešenia hry s maticou platieb, ktorú dostaneme z matice $\mathbf{A}$ vyčiarknutím niektorých jej riadkov a stĺpcov. V tejto súvislosti hovoríme aj o tzv. *redukcii matice platieb.*

Zavedieme nasledujúce pojmy a označenia: Budeme hovoriť, že vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *dominuje*, resp. *ostro dominuje* vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ak pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$a_j \geqq b_j$$

resp.

$$a_j > b_j$$

Rozšírením vektora $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ na k-tom mieste, kde $1 \leqq k \leqq n + 1$, budeme nazývať vektor

$$\boldsymbol{c}^{(k)} = (c_1, \ldots, c_{k-1}, 0, c_k, \ldots, c_n)$$

Veta 2.8

Ak v hre s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ platí, že

1. pre nejaké $k\,(1 \leqq k \leqq m)$ existujú čísla $p_i\,(i \neq k)$ tak, že pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$\sum_{i \neq k} p_i a_{ij} \geqq a_{kj}, \; \sum_{i \neq k} p_i = 1, \; p_i \geqq 0 \qquad (2.30)$$

potom existuje optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$, ktorej zložka $x_k^{(0)} = 0$;

2. pre nejaké $t\,(1 \leqq t \leqq n)$ existujú čísla $q_j\,(j \neq t)$ tak, že pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ dostaneme

$$\sum_{j \neq t} q_j a_{ij} \leqq a_{it}, \; \sum_{j \neq t} q_j = 1, \; q_j \geqq 0 \qquad (2.31)$$

potom existuje optimálna zmiešaná stratégia $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ druhého hráča, ktorej zložka $y_t^{(0)} = 0$.

Z vety 2.8 vyplývajú nasledujúce tvrdenia:

a) Ak k-tý riadok matice platieb hry H je dominovaný nejakou konvexnou lineárnou kombináciou ostatných riadkov tejto matice, potom príslušný riadok môžeme z matice platieb vyčiarknuť a riešiť hru H_1 s takto redukovanou maticou platieb. Optimálne zmiešané stratégie druhého hráča v hre H_1 budú jeho optimálnymi stratégiami aj v hre H. Rozšírenie na k-tom mieste každej optimálnej zmiešanej stratégie prvého hráča v hre H_1 bude jeho optimálnou stratégiou aj v hre H. Hodnoty hier H a H_1 sú rovnaké.

b) Ak p-tý stĺpec matice platieb hry H dominuje nejakú konvexnú kombináciu ostatných stĺpcov tejto matice, potom príslušný stĺpec môžeme vyčiarknuť a riešiť hru H_2 s takto redukovanou maticou platieb. Optimálne zmiešané stratégie prvého hráča v hre H_2 budú jeho optimálnymi stratégiami aj v hre H. Rozšírenie na p-tom mieste každej optimálnej zmiešanej stratégie druhého hráča v hre H_2 bude jeho optimálnou stratégiou aj v hre H. Hodnoty hier H a H_2 sú rovnaké.

Poznámka 2.4

1. Pripomenieme, že konvexnou lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)}$ nazývame vektor

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{a}^{(j)}$$

kde pre koeficienty $d_1, d_2, \ldots, d_n$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = 1, \; d_j \geqq 0$$

2. Možno dokázať, že ak v (2.30) platí vzťah ostrej dominácie, potom pre každú optimálnu zmiešanú stratégiu prvého hráča $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$ je zložka $x_k^{(0)} = 0$. Analogicky, ak v (2.31) platí vzťah ostrej dominácie, potom pre každú optimálnu zmiešanú stratégiu druhého hráča $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ je zložka $y_t^{(0)} = 0$.

Možnosť využitia vety 2.8 pri analýze maticových hier vysvetľujeme na číselnom príklade.

Príklad 2.7

Je daná hra s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Preskúmajme, či maticu $\mathbf{A}$ možno redukovať.

Prvý riadok matice $\mathbf{A}$ je dominovaný tretím riadkom, môžeme ho preto vyčiarknuť a skúmať hru s maticou platieb

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Optimálne zmiešané stratégie v hre s maticou $\mathbf{A}_1$ sú pre hráča totožné s jeho optimálnymi stratégiami v hre s maticou $\mathbf{A}$. Rozšírenie na prvom mieste ľubovoľnej zmiešanej optimálnej stratégie prvého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}_1$ bude jeho optimálnou stratégiou v hre s maticou $\mathbf{A}$.

Maticu $\mathbf{A}_1$ môžeme ďalej redukovať. Jej piaty stĺpec ostro dominuje prvý stĺpec; vyčiarkneme ho teda a preskúmame hru s maticou

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Prvý stĺpec matice $\mathbf{A}_2$ dominuje tretí stĺpec. Po jeho vyčiarknutí dostaneme hru s maticou

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Existuje konvexná lineárna kombinácia druhého a tretieho stĺpca matice $\mathbf{A}_3$, ktorá je dominovaná prvým stĺpcom:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geqq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vzhľadom na to môžeme prvý stĺpec matice $\mathbf{A}_3$ vyčiarknuť a skúmať hru s maticou platieb

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Maticu $\mathbf{A}_4$ nemožno ďalej redukovať.

Nech $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ je optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}_4$, potom vektor $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ bude jeho optimálnou zmiešanou stratégiou v hre s maticou $\mathbf{A}$.

Nech $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$ je optimálna zmiešaná stratégia druhého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}_4$, potom vektor $(0, 0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, 0)$ bude jeho optimálnou zmiešanou stratégiou v hre s maticou $\mathbf{A}$.

Hry s maticami platieb $\mathbf{A}_4$ a $\mathbf{A}$ majú rovnakú hodnotu.

Vidíme, že uvedená vlastnosť môže podstatne zjednodušiť riešenie maticovej hry, pretože namiesto analýzy hry s maticou platieb veľkých rozmerov môžeme často riešiť redukovanú hru s menšou maticou platieb.

Na záver tohto odseku sformulujeme ešte jednu vlastnosť maticových hier, ktorú použijeme ďalej.

Máme hru s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ a s hodnotou v. Preskúmame maticové hry, ktoré možno odvodiť tak, že k všetkým prvkom matice $\mathbf{A}$ pripočítame ľubovoľnú konštantu a, resp. že všetky prvky matice $\mathbf{A}$ vynásobíme kladnou konštantou b. Označíme

$$\mathbf{A}_a = (a_{ij} + a)$$

$$\mathbf{A}_b = (ba_{ij})$$

Hodnoty hier s maticami platieb $\mathbf{A}_a$, resp. $\mathbf{A}_b$ označíme v_a, resp. v_b.

Veta 2.9

Optimálne stratégie hráčov v maticovej hre sa nezmenia, ak k matici platieb pripočítame ľubovoľnú konštantu a, resp. ak maticu platieb vynásobíme kladnou konštantou b. Pre hodnoty hier s maticami platieb $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_a$ a $\mathbf{A}_b$ pritom platí

$$v_a = v + a$$

$$v_b = bv$$

Dôkaz priamo vyplýva z uvedených vlastností optimálnych stratégií, napr. z viet 2.4 a 2.5.

Poznámka 2.5

Z vety 2.9 je zrejmé, že konečné hry dvoch hráčov s konštantným nenulovým súčtom a s konštantným nulovým súčtom sú z hľadiska minmaxového princípu správania hráčov ekvivalentné; formálne môžeme každú hru s konštantným nenulovým súčtom c previesť na hru s nulovým súčtom odpočítaním konštanty c od všetkých prvkov matice platieb.

2.1.5 Vzťahy medzi maticovými hrami a úlohami lineárneho programovania

Dôkaz vety 2.3 o minmaxe má konštruktívny charakter, pretože naznačuje, ako metódami lineárneho programovania hľadať riešenie maticovej hry v zmiešaných stratégiách. Z dôkazu vieme, že riešenie akejkoľvek maticovej hry možno určiť tak, že nájdeme optimálne riešenie úloh lineárneho programovania (2.18) a (2.19). Vzhľadom na to, že tvar uvedených úloh nie je veľmi vhodný na použitie štandardnej simplexovej metódy lineárneho programovania, ukážeme najprv, ako tieto úlohy zjednodušiť.

Hra s kladnou maticou platieb má kladnú hodnotu. Z vety 2.9 vieme, že každú maticovú hru môžeme pripočítaním vhodnej kladnej konštanty ku všetkým prvkom matice platieb upraviť tak, aby sme dostali hru s nezmenenými optimálnymi stratégiami hráčov a kladnou hodnotou. Z hodnoty takto upravenej hry pritom vieme odvodiť hodnotu pôvodnej hry. Bez obmedzenia všeobecnosti ďalších úvah budeme preto predpokladať, že skúmame maticovú hru s kladnou hodnotou.

Úlohy (2.18) a (2.19) môžeme zapísať takto:

Maximalizovať w (2.18a)

za podmienok

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqq w$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geqq 0$$

Minimalizovať u (2.19a)

za podmienok

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqq u$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geqq 0$$

Pretože predpokladáme, že hodnota hry je vždy kladná, zaujímajú nás iba také riešenia úloh (2.18a), resp. (2.19a), pre ktoré $w > 0$, resp. $u > 0$. Vzhľadom na to môžeme všetky nerovnice v sústave ohraničení úlohy (2.18a) vydeliť premennou w bez toho, aby sa zmenil ich zmysel. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\frac{x_i}{w} \geqq 1$$

Pretože $x_i \geqq 0$ a $w > 0$, musí platiť $\frac{x_i}{w} \geqq 0$. Vykonáme substitúciu

$$p_i = \frac{x_i}{w}$$

z ktorej vyplýva

$$x_i = wp_i$$

a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = w\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

teda

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{w}$$

Maximalizovať w je v našom prípade to isté ako minimalizovať výraz

$$\sum_{i=1}^{m} p_i$$

Východiskovú úlohu (2.18) môžeme teda upraviť na nasledujúci tvar:

Minimalizovať

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \tag{2.32}$$

za podmienok

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geqq 1$$

$$p_i \geqq 0$$

Nech

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \ldots, p_i^{(0)}, \ldots, p_m^{(0)})$$

je ľubovoľné optimálne riešenie úlohy (2.32), potom vektor

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$$

taký, že

$$x_1^{(0)} = \frac{p_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)}}$$

je optimálnou zmiešanou stratégiou prvého hráča a číslo

$$v = w^{(0)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)}}$$

je hodnotou príslušnej maticovej hry.

Na základe analogickej substitúcie možno úlohu (2.19), resp. (2.19a) upraviť na tvar:

Maximalizovať

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \tag{2.33}$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j \leqq 1$$

$$z_j \geqq 0$$

Nech
$$\boldsymbol{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_j^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$$
je nejaké optimálne riešenie úlohy (2.33), potom vektor
$$\boldsymbol{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_j^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$$
taký, že
$$y_j^{(0)} = \frac{z_j^{(0)}}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{(0)}}$$
je optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča a číslo
$$v = u^{(0)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{(0)}}$$
je hodnotou príslušnej maticovej hry.

Ukázali sme už, že každú maticovú hru môžeme formulovať a riešiť ako nejakú úlohu lineárneho programovania. Budeme sa teraz zaoberať opačným problémom. Ukážeme, že každú úlohu lineárneho programovania možno formulovať ako maticovú hru.

Preskúmame nasledujúcu dvojicu duálnych úloh lineárneho programovania:

Maximalizovať
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.34}$$
za podmienok
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i$$
$$x_j \geqq 0$$
kde $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, c_j, a_{ij}, b_i sú konštanty.

Minimalizovať
$$u = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{2.35}$$
za podmienok
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqq c_j$$
$$y_i \geqq 0$$
kde $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a konštanty c_j, a_{ij}, b_i sú rovnaké ako v úlohe (2.34). Poznamenávame, že každú úlohu lineárneho programovania môžeme upraviť na tvar (2.34) alebo (2.35).

Hľadáme maticovú hru ekvivalentnú uvedenej dvojici duálnych úloh lineárneho programovania v tom zmysle, že optimálne zmiešané stratégie hráčov v tejto hre určujú optimálne riešenie úloh (2.34) a (2.35).

Preskúmame najprv jednoduchší špeciálny prípad, keď pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ platí $b_i > 0$ a pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $c_j > 0$. Za uvedených predpokladov má úloha (2.34) vždy prípustné riešenie. Okrem toho vždy existuje prípustné riešenie, pre ktoré je hodnota účelovej funkcie kladná. Z teórie duality lineárneho programovania potom vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Ak je duálna úloha (2.35) prípustná, t. j. ak množina jej prípustných riešení nie je prázdna, potom primárna úloha (2.34) má konečné optimálne riešenie, t. j. hodnota jej účelovej funkcie je zhora ohraničená na množine prípustných riešení. Ak je duálna úloha (2.35) neprípustná, potom primárna úloha (2.34) je neohraničená, t. j. hodnota jej účelovej funkcie nie je zhora ohraničená na množine prípustných riešení.

Nech $\mathbf{D} = (d_{ij})$, kde
$$d_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i c_j}$$
je matica odvodená z príslušných konštánt úlohy (2.34), resp. (2.35). Preskúmame maticovú hru s maticou platieb $\mathbf{D}$. Označme
$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$$
optimálnu zmiešanú stratégiu maximalizujúceho hráča a
$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
optimálnu zmiešanú stratégiu minimalizujúceho hráča v hre s maticou $\mathbf{D}$. Nech v je hodnota tejto hry. Z vlastností úloh lineárneho programovania a maticových hier vyplývajú nasledujúce tri tvrdenia.

Veta 2.10

Nech $v > 0$, potom taký vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, že
$$x_j = \frac{q_j}{v c_j}$$
je optimálnym riešením úlohy (2.34) a taký vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, že
$$y_i = \frac{p_i}{v b_i}$$
je optimálnym riešením úlohy (2.35), pričom

$$z = \frac{1}{v} = u$$

je optimálna hodnota účelovej funkcie obidvoch úloh.

Veta 2.11

Nech úloha (2.34) je ohraničená, pričom jej optimálnym riešením je vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $z > 0$ je optimálna hodnota účelovej funkcie. Nech ďalej vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je optimálne riešenie úlohy (2.35) a $u > 0$ je optimálna hodnota účelovej funkcie tejto úlohy. Potom vektor $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ taký, že

$$q_j = \frac{x_j c_j}{z}$$

je optimálnou zmiešanou stratégiou minimalizujúceho hráča a taký vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, že

$$p_i = \frac{y_i b_i}{u}$$

je optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča v hre s maticou platieb $\mathbf{D}$, pričom veličina

$$v = \frac{1}{z} = \frac{1}{u}$$

je hodnotou tejto hry.

Veta 2.12

Úloha lineárneho programovania (2.34) je neohraničená práve vtedy, keď pre hodnotu v príslušnej maticovej hry s maticou platieb $\mathbf{D}$ platí

$$v \leqq 0$$

Príklad 2.8

Preskúmame nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:
Maximalizovať

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

za podmienok

$$\begin{aligned} 24x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 2 \\ 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 1 \\ 9x_1 + 12x_2 + 12x_3 &\leq 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že úloha spĺňa predpoklad $b_i > 0$, $c_j > 0$, môžeme teda použiť vety 2.10, 2.11 a 2.12. Matica platieb zodpovedajúcej maticovej hry má tvar

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matica $\mathbf{D}$ má sedlový bod (druhý riadok a tretí stĺpec). Optimálnou stratégiou maximalizujúceho hráča je teda vektor $\boldsymbol{p} = (0, 1, 0)$, optimálnou stratégiou minimalizujúceho hráča je vektor $\boldsymbol{q} = (0, 0, 1)$ a hodnota hry $v = 2$.

Podľa vety 2.10 určíme optimálne riešenie skúmanej úlohy

$$\boldsymbol{x} = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

a optimálnu hodnotu účelovej funkcie $z = \frac{1}{2}$. Zároveň určíme aj optimálne riešenie príslušnej duálnej úlohy

$$\boldsymbol{y} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Skôr ako prejdeme k formulácii maticovej hry ekvivalentnej všeobecnému prípadu dvojice duálnych úloh lineárneho programovania (2.34) a (2.35), zavedieme niektoré nové pojmy.

Definícia 2.6

Štvorcovú maticu $\mathbf{D} = (d_{ij})$ rádu n nazývame *kososymetrická*, ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ a pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$d_{ij} = -d_{ji}$$

teda $\mathbf{D} = -\mathbf{D}^{(T)}$. Maticovú hru s kososymetrickou maticou platieb nazývame *symetrická* maticová hra.

Veta 2.13

Hodnota ľubovoľnej symetrickej maticovej hry $v = 0$. Každá optimálna stratégia jedného z hráčov v symetrickej maticovej hre je súčasne optimálnou stratégiou jeho protivníka.

Dôkaz vety priamo vyplýva z vlastností optimálnych stratégií (pozri stať 2.1.4).

Príklad 2.9

Hra s maticou platieb

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je symetrická. Ľahko sa presvedčíme o tom, že hra má jednoznačné riešenie v zmiešaných stratégiách, pričom obidvaja hráči majú rovnakú optimálnu zmiešanú stratégiu

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Ukážte, že hodnota hry $v = 0$.

Zapíšeme teraz úlohy (2.34) a (2.35) v maticovom tvare:

$$\max\{\boldsymbol{c}^{(T)}\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq 0\} \tag{2.34a}$$

$$\min\{\boldsymbol{b}^{(T)}\boldsymbol{y} \mid \mathbf{A}^{(T)}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geqq 0\} \tag{2.35a}$$

V tomto zápise $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica typu $m \times n$, $\boldsymbol{b}$ je m-rozmerný stĺpcový vektor konštánt b_i a $\boldsymbol{c}$ je n-rozmerný stĺpcový vektor konštánt c_j. Vektor $\boldsymbol{x}$, resp. $\boldsymbol{y}$ je n-rozmerný, resp. m-rozmerný stĺpcový vektor premenných z úlohy (2.34), resp. (2.35).

Dvojici duálnych úloh lineárneho programovania (2.34a) až (2.35a) priradíme maticovú hru s maticou platieb

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ -\mathbf{A}^{(T)} & \mathbf{O} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}^{(T)} & -\boldsymbol{c}^{(T)} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

kde $\mathbf{O}_m$, resp. $\mathbf{O}_n$ je štvorcová nulová matica rádu m, resp. n. Matica $\mathbf{D}$ je zrejme kososymetrická, hra s touto maticou je teda symetrická a má nulovú hodnotu.

Označme

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, s)$$

kde

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

a s je skalárna premenná, zmiešanú stratégiu prvého, resp. druhého hráča v hre s maticou platieb $\mathbf{D}$.

Z vlastností duálnych úloh lineárneho programovania a maticových hier vyplývajú nasledujúce tvrdenia:

Veta 2.14

Nech $\boldsymbol{w}^{(0)} = (\boldsymbol{p}^{(0)}, \boldsymbol{q}^{(0)}, s_0)$ je taká ľubovoľná optimálna zmiešaná stratégia ktoréhokoľvek hráča v hre s maticou platieb (2.36), že $s_0 > 0$. Potom vektor

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

kde

$$x_j^{(0)} = \frac{q_j^{(0)}}{s_0}$$

je optimálne riešenie úlohy (2.34a) a vektor

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$$

kde

$$y_i^{(0)} = \frac{p_i^{(0)}}{s_0}$$

je optimálne riešenie úlohy (2.35a)

Veta 2.15

Nech dvojica duálnych úloh lineárneho programovania (2.34a) a (2.35a) je riešiteľná, potom existuje taká optimálna zmiešaná stratégia

$$\boldsymbol{w}^{(0)} = (\boldsymbol{p}^{(0)}, \boldsymbol{q}^{(0)}, s_0)$$

hráčov v maticovej hre s maticou platieb (2.36), pre ktorú $s_0 > 0$.

Príklad 2.10

Preskúmajme úlohu lineárneho programovania:

Maximalizovať

$$z = -3x_1 + 2x_2 + x_3$$

za podmienok

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leqq 8 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Príslušná duálna úloha vyzerá takto:

Minimalizovať

$$u = 6y_1 + 8y_2$$

za podmienok

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geqq -3 \\ 2y_1 + y_2 &\geqq 2 \\ -y_1 + 3y_2 &\geqq 1 \\ y_1, \quad y_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Ekvivalentná symetrická maticová hra bude mať maticu platieb

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka 2.6

1. Ak chceme zostaviť ekvivalentnú maticovú hru pre dvojicu duálnych úloh lineárneho programovania, ktoré majú iný tvar ako (2.34) až (2.35), napr. obsahujú v sústavách ohraničení rovnice, resp. nerovnice opačného smeru, alebo nemajú všetky premenné nezáporné, musíme túto dvojicu úloh najprv upraviť na symetrický tvar (2.34) až (2.35) a až potom pristúpiť k zápisu zodpovedajúcej matice (2.36).
2. Úprava dvojice duálnych úloh lineárneho programovania na maticovú hru má iba teoretický význam, pretože z výpočtového hľadiska sú algoritmy lineárneho programovania efektívnejšie ako špeciálne algoritmy riešenia maticových hier.

2.1.6 Riešenie maticových hier metódami lineárneho programovania

V stati 2.1.5 sme ukázali, že hru s kladnou maticou platieb môžeme riešiť tak, že vyriešime úlohu lineárneho programovania (2.32), z optimálneho riešenia ktorej získame optimálnu zmiešanú stratégiu prvého hráča a úlohu lineárneho programovania (2.33), z optimálneho riešenia ktorej získame optimálnu zmiešanú stratégiu druhého hráča.

Ľahko sa presvedčíme o tom, že úlohy (2.32) až (2.33) sú navzájom duálnymi úlohami lineárneho programovania, preto stačí na určenie riešenia maticovej hry v zmiešaných stratégiách vyriešiť iba jednu z nich. Pri použití simplexovej metódy obsahuje totiž simplexová tabuľka optimálneho riešenia ktorejkoľvek z tejto dvojice úloh aj informáciu o optimálnom riešení duálnej úlohy.

Podľa vety 2.5 môžeme každú maticovú hru upraviť na hru s kladnou maticou platieb bez toho, aby sa zmenili optimálne stratégie hráčov.

Ukážeme si, ako na základe týchto poznatkov možno využiť známe metódy lineárneho programovania na riešenie maticových hier.

Príklad 2.11

Vráťme sa k modelu z príkladu 2.3 o propagačnej kampani na zahraničných trhoch. Pre konkrétne údaje

$$n = 3,\ s_1 = 30,\ s_2 = 20,\ s_3 = 10,\ p = \frac{1}{3}$$

dostaneme maticu platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & \frac{20}{3} & 20 \\ 10 & 10 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Táto matica zrejme nemá sedlový bod a neexistuje teda riešenie hry v čistých stratégiách. Podľa vety 2.9 zjednodušíme maticu tak, že všetky jej prvky vynásobíme konštantou $b = \frac{3}{10}$. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 6 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Príslušná úloha (2.32) pre hru s touto maticou platieb bude vyzerať takto:
Minimalizovať

$$p_1 + p_2 + p_3$$

za podmienok

$$\begin{aligned} 3p_1 + 6p_2 + 3p_3 &\geqq 1 \\ 9p_1 + 2p_2 + 3p_3 &\geqq 1 \\ 9p_1 + 6p_2 + \ \ p_3 &\geqq 1 \\ p_1, \quad p_2, \quad p_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Úloha (2.33) bude vyzerať takto:
Maximalizovať

$$z_1 + z_2 + z_3$$

za podmienok

$$\begin{aligned} 3z_1 + 9z_2 + 9z_3 &\leqq 1 \\ 6z_1 + 2z_2 + 6z_3 &\leqq 1 \\ 3z_1 + 3z_2 + \ \ z_3 &\leqq 1 \\ z_1, \quad z_2, \quad z_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Úlohu (2.32) je výhodné riešiť duálnym algoritmom simplexovej metódy, úlohu (2.33) s výhodou vyriešime základným primárnym algoritmom simplexovej metódy (z hľadiska výpočtovej náročnosti riešime vždy tú úlohu, ktorá má menší počet riadkov). V našom prípade vyriešime napr. úlohu (2.33) základným primárnym algoritmom simplexovej metódy. Postup výpočtov sme zapísali do *tab. 2.1*, *tab. 2.2* a *tab. 2.3*.

Tabuľka 2.1

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	
z_4	3	9	9	1	0	0	1
z_5	6	2	6	0	1	0	1
z_6	3	3	1	0	0	1	1
	-1	-1	-1	0	0	0	0

Tabuľka 2.2

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	
z_4	0	8	6	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
z_1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
z_6	0	2	-2	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Tabuľka 2.3

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	
z_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$
z_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	0	$\frac{7}{48}$
z_6	0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	1	$\frac{3}{8}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{24}$

Z posledného stĺpca *tab. 2.3* prečítame optimálne riešenie príslušnej úlohy (2.33)

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{7}{48}, \frac{1}{16}, 0\right)$$

a optimálnu hodnotu účelovej funkcie

$$z_1^{(0)} + z_2^{(0)} + z_3^{(0)} = \frac{5}{24}$$

Z posledného riadku *tab. 2.3* (v stĺpcoch, ktoré zodpovedajú doplnkovým premenným z_4, z_5, z_6) prečítame optimálne riešenie príslušnej duálnej úlohy (2.32)

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{8}, 0\right)$$

Ľahko sa presvedčíme o tom, že

$$p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} = \frac{5}{24}$$

Optimálnu zmiešanú stratégiu prvého hráča dostaneme, ak zložky vektora $\boldsymbol{p}^{(0)}$ vydelíme optimálnou hodnotou účelovej funkcie, teda

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

Optimálnu zmiešanú stratégiu druhého hráča dostaneme, ak zložky vektora $\boldsymbol{z}^{(0)}$ vydelíme optimálnou hodnotou účelovej funkcie, teda

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0\right)$$

Hodnota hry $\bar{v}$ s upravenou maticou platieb je

$$\bar{v} = \frac{1}{p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)}} = \frac{1}{z_1^{(0)} + z_2^{(0)} + z_3^{(0)}} = \frac{24}{5}$$

Z vety 2.9 vieme, že optimálne zmiešané stratégie hráčov v hre s upravenou maticou platieb sú totožné s ich optimálnymi zmiešanými stratégiami v hre s pôvodnou maticou platieb. Hodnotu hry s pôvodnou maticou platieb určíme takto:

$$v = \frac{1}{b}\bar{v} = \frac{10}{3} \cdot \frac{24}{5} = 16$$

Získané výsledky musíme ešte interpretovať. V daných podmienkach sa náš podnik zahraničného obchodu (prvý hráč) rozhodne medzi propagačnou kampaňou na prvom a druhom trhu, pričom použije náhodný mechanizmus, ktorý volí prvý trh s pravdepodobnosťou 2/5 a druhý trh s pravdepodobnosťou 3/5. Pre konkurenčnú firmu (druhý hráč) je najvýhodnejšie pripraviť propagačnú kampaň na jednom z prvých dvoch trhov, pričom pre konkrétne rozhodnutie použije náhodný mechanizmus, ktorý volí prvý trh s pravdepodobnosťou 7/10 a druhý trh s pravdepodobnosťou 3/10. Stredná hodnota objemu objednávok, ktoré získa náš podnik svojou propagačnou kampaňou sa bude pritom rovnať 16 jednotkám.

2.1.7 Množiny optimálnych stratégií

Podľa vety o minmaxe má každý z hráčov v maticovej hre aspoň jednu optimálnu zmiešanú stratégiu. Všeobecne môžu existovať variantné optimálne zmiešané stratégie hráčov. Preto má zmysel hovoriť o množinách optimálnych stratégií hráčov v maticovej hre.

Označme ako $K_1[\mathbf{A}]$, resp. $K_2[\mathbf{A}]$ množinu optimálnych zmiešaných stratégií prvého, resp. druhého hráča v maticovej hre s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$.

Poznámka 2.7

1. Množinu $K \subset E_n$ nazývame konvexnou, ak pre ľubovoľné dva body x, $y \in K$ a pre všetky d také, že $0 \leq d \leq 1$ platí

$$dx + (1 - d)y \in K$$

2. Nech K je konvexná množina. Bod $x \in K$ nazývame krajným bodom množiny K, ak neexistujú také dva body y, $z \in K$, pre ktoré by platilo

$$x = dy + (1 - d)z, \; 0 < d < 1$$

3. Neprázdnu konvexnú uzatvorenú množinu K, ktorá obsahuje konečný počet krajných bodov, nazývame konvexná polyedrická množina. Ak je konvexná polyedrická množina ohraničená, nazývame ju konvexný polyéder.

4. Nech $K \subset E_n$ je konvexný polyéder a $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ sú všetky jeho krajné body. Potom ľubovoľný bod $x \in K$ môžeme vyjadriť ako konvexnú lineárnu kombináciu (pozri poznámku 2.4) krajných bodov. Ľubovoľná konvexná lineárna kombinácia krajných bodov je bodom množiny K.

Veta 2.16

Množiny $K_1[\mathbf{A}]$ a $K_2[\mathbf{A}]$ optimálnych zmiešaných stratégií prvého a druhého hráča v maticovej hre sú konvexné polyédre.

D ô k a z vyplýva zo skutočnosti, že všetky optimálne zmiešané stratégie hráča v maticovej hre sú optimálnymi riešeniami nejakej úlohy lineárneho programovania s ohraničenou neprázdnou množinou prípustných riešení (pozri dôkaz vety 2.3).

Krajnými optimálnymi stratégiami prvého, resp. druhého hráča v maticovej hre ďalej nazývame také zmiešané stratégie $\boldsymbol{x} \in S_m$, resp. $\boldsymbol{y} \in S_n$, ktoré sú krajnými bodmi množiny $K_1[\mathbf{A}]$, resp. $K_2[\mathbf{A}]$.

Z poznámky 2.7 a vety 2.16 vyplýva, že na to, aby sme mohli charakterizovať množinu optimálnych stratégií hráča v maticovej hre, stačí poznať všetky krajné optimálne stratégie, ktorých je konečný počet. Každú optimálnu stratégiu hráča môžeme potom vyjadriť ako konvexnú kombináciu konečného počtu krajných

optimálnych stratégií. Problém určenia množiny všetkých optimálnych stratégií sa teda redukuje na problém určenia konečného počtu krajných optimálnych stratégií.

Veta 2.17

Nech $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} \in K_1[\mathbf{A}]$ sú dve optimálne stratégie prvého hráča a $\boldsymbol{y}^{(1)}$, $\boldsymbol{y}^{(2)} \in K_2[\mathbf{A}]$ sú dve rôzne optimálne stratégie druhého hráča. Potom sedlovými bodmi funkcie $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vzhľadom na množinu $S_m \times S_n$ sú všetky dvojice $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)})$, $(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$, $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$ a $(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(1)})$, pričom platí

$$E(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)}) = E(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(2)}) = E(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)}) = E(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(1)})$$

D ô k a z priamo vyplýva z dôkazu vety 2.3. Z vety 2.17 je zrejmé, že v prípade existencie viacerých optimálnych stratégií je pre hráča ľahostajné, ktorú z nich zvolí.

Pri analýze maticovej hry je dôležité poznať nevyhnutné a postačujúce podmienky na to, aby nejaká optimálna zmiešaná stratégia bola krajnou optimálnou stratégiou.

Zavedieme nasledujúce označenia: Nech $\boldsymbol{x} \in S_m$, resp. $\boldsymbol{y} \in S_n$ je zmiešaná stratégia prvého, resp. druhého hráča v hre s maticou platieb $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbf{B}$ je ľubovoľná submatica typu $r \times k$ matice $\mathbf{A}$, kde $r \leq m$, $k \leq n$. Ako $\boldsymbol{x}_B$, resp. $\boldsymbol{y}_B$ označíme vektor, ktorý dostane zo zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x}$, resp. $\boldsymbol{y}$ vyčiarknutím zložiek zodpovedajúcich riadkom, resp. stĺpcom, ktorých vyčiarknutím z matice $\mathbf{A}$ sme získali maticu $\mathbf{B}$. Ako $\boldsymbol{e}_k$ označíme k-rozmerný súčtový vektor, t. j. vektor, ktorého všetky zložky sa rovnajú 1.

Veta 2.18

Optimálna zmiešaná stratégia $\boldsymbol{x} \in K_1[\mathbf{A}]$ je krajnou optimálnou stratégiou prvého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}$ a hodnotou $v \neq 0$ práve vtedy, keď existuje regulárna štvorcová submatica $\mathbf{B}$ rádu r matice $\mathbf{A}$ a optimálna zmiešaná stratégia $\boldsymbol{y} \in K_2[\mathbf{A}]$ druhého hráča tak, že platí:

a) $\boldsymbol{x}_B$ a $\boldsymbol{y}_B$ sú zmiešané stratégie prvého a druhého hráča v hre s maticou $\mathbf{B}$, t. j. $\boldsymbol{x}_B \in S_r$ a $\boldsymbol{y}_B \in S_r$;

b) sú splnené maticové rovnosti

$$\mathbf{B}^{(T)}\boldsymbol{x}_B = e_r v \tag{2.37}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{y}_B = e_r v \tag{2.38}$$

D ô k a z vyplýva napr. z dôkazu vety 2.3, teórie duality lineárneho programovania a definície bázického riešenia úlohy lineárneho programovania.

Poznámka 2.8

1. Zo vzťahov (2.37) a (2.38) a z vety 2.5 vyplýva, že vektory $\boldsymbol{x}_B$ a $\boldsymbol{y}_B$ sú optimálne zmiešané stratégie prvého a druhého hráča v hre s maticou platieb $\mathbf{B}$, t. j. $\boldsymbol{x}_B \in K_1[\mathbf{B}]$ a $\boldsymbol{y}_B \in K_2[\mathbf{B}]$ a v je hodnota tejto hry.

2. Úplne symetrickú vetu dostaneme pre krajnú optimálnu stratégiu druhého hráča. Z vety 2.18 je zrejmé, že vektor $\boldsymbol{y} \in S_n$, ktorého existencia je podmienkou toho, že vektor $\boldsymbol{x} \in K_1[\mathbf{A}]$ je krajnou optimálnou stratégiou prvého hráča, bude krajnou optimálnou stratégiou druhého hráča.

3. Predpoklad vety 2.18 o tom, že hodnota hry $v \neq 0$ nemá vôbec obmedzujúci charakter, pretože podľa vety 2.9 môžeme každú maticovú hru upraviť na ekvivalentnú hru s nenulovou hodnotou.

Príklad 2.12

Analyzujme hru s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Zrejmé je, že hodnota hry $v \neq 0$, teda môžeme aplikovať vetu 2.18.

Vektor $\boldsymbol{y} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča v tejto hre, pričom hodnota hry $v = 5$. Chceme overiť, či $\boldsymbol{y}$ je krajná optimálna stratégia.

Môžeme sa presvedčiť o tom, že submatica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

ktorú sme dostali z matice $\mathbf{A}$ vyčiarknutím prvého stĺpca a posledného riadka, je regulárna; jej determinant det $\mathbf{B} = 45$. V tomto prípade

$$\boldsymbol{y}_B = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^{(T)}$$

a platí

$$\mathbf{B}\boldsymbol{y}_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = e_2 v$$

t. j. splnená podmienka (2.38) vety 2.18. Ďalej riešením systému lineárnych rovníc

$$\mathbf{B}^{(T)}\boldsymbol{x}_B = e_2 v$$

kde $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2)^{(T)}$, t. j.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dostaneme $\boldsymbol{x}_B = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^{(T)}$. Ľahko sa presvedčíme (napr. na základe vety 2.5) o tom, že zodpovedajúci vektor

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

je optimálnou zmiešanou stratégiou prvého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}$. Z uvedeného vyplýva, že vektor $\boldsymbol{y}$ je krajnou optimálnou stratégiou druhého hráča v hre s maticou $\mathbf{A}$. Súčasne sme určili krajnú optimálnu stratégiu $\boldsymbol{x}$ prvého hráča v tejto hre.

Možno dokázať, že vektor $\boldsymbol{x}$ je jedinou krajnou optimálnou stratégiou prvého hráča v skúmanej hre. Druhý hráč má ešte jednu krajnú optimálnu stratégiu $\bar{\boldsymbol{y}} = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Množina optimálnych stratégií prvého hráča obsahuje jediný bod, t. j. $K_1[\mathbf{A}] = \{\boldsymbol{x}\}$. Množina optimálnych stratégií druhého hráča obsahuje všetky konvexné lineárne kombinácie dvoch krajných optimálnych stratégií $\boldsymbol{y}$ a $\bar{\boldsymbol{y}}$, t. j.

$$K_2[\mathbf{A}] = \{\boldsymbol{y} \in E_3,\ \boldsymbol{y} = d\boldsymbol{y} + (1 - d)\,\bar{\boldsymbol{y}},\ 0 \leqq d \leqq 1\}$$

Optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča je preto každý vektor

$$\boldsymbol{y} = d \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (1 - d) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

kde $0 \leqq d \leqq 1$.

2.1.8 Shapleyho a Snowova metóda riešenia maticových hier

Všeobecnú metódu na určenie všetkých krajných optimálnych stratégií obidvoch hráčov v maticovej hre, ktorá vychádza priamo z vety 2.18, vypracovali L. S. Shapley a R. N. Snow.

Máme hru s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ a s nenulovou hodnotou $v \neq 0$. Nech $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je nejaká štvorcová regulárna submatica rádu r matice $\mathbf{A}$. Ponechajme v platnosti označenia použité vo vete 2.18.

Určíme vektory

$$x_B = \frac{(\mathbf{B}^{-1})^{(T)} e_r}{e_r^{(T)} \mathbf{B}^{-1} e_r} \tag{2.39}$$

$$y_B = \frac{\mathbf{B}^{-1} e_r}{e_r^{(T)} \mathbf{B}^{-1} e_r} \tag{2.40}$$

a číslo

$$v = \frac{1}{e_r^{(T)} \mathbf{B}^{-1} e_r} \tag{2.41}$$

kde $\mathbf{B}^{-1}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{B}$.

Definujme vektor x, resp. y, ktorý dostaneme z vektora x_B, resp. y_B rozšírením o nuly na tých miestach, ktoré zodpovedajú riadkom, resp. stĺpcom matice $\mathbf{A}$ vyčiarknutým pri odvodení submatice $\mathbf{B}$.

Z vety 2.18 vyplýva, že vektory x a y sú krajné optimálne stratégie prvého a druhého hráča v hre s maticou platieb $\mathbf{A}$ a číslo v je hodnota tejto hry práve vtedy, keď platí

$$x \in S_m, \quad y \in S_n \tag{2.42}$$

$$\mathbf{A}^{(T)} x \geqq e_n v, \quad \mathbf{A} y \leqq e_m v \tag{2.43}$$

Na základe uvedených poznatkov môžeme sformulovať kombinatorický postup určenia všetkých krajných optimálnych stratégií prvého a druhého hráča a hodnoty hry.

Preskúmame všetky štvorcové submatice $\mathbf{B}$ matice $\mathbf{A}$ (ktorých je konečný počet). Pre každú submaticu $\mathbf{B}$ vykonáme nasledujúcu analýzu:

1. Preskúmame determinant submatice $\mathbf{B}$. Ak det $\mathbf{B} = 0$, potom submatica $\mathbf{B}$ nemôže určovať krajné optimálne stratégie a hodnotu hry, preto prejdeme k analýze ďalšej submatice. Ak det $\mathbf{B} \neq 0$, prejdeme k bodu 2.

2. Podľa vzťahov (2.39) a (2.40) určíme vektory x_B a y_B a overíme splnenie podmienky (2.42). Ak táto podmienka nie je splnená, nemôže submatica $\mathbf{B}$ určovať krajné optimálne stratégie a hodnotu hry a prejdeme k analýze ďalšej štvorcovej submatice. V opačnom prípade prejdeme k bodu 3.

3. Podľa vzorca (2.41) určíme veličinu v a overíme splnenie podmienky (2.43). Ak táto podmienka nie je splnená, potom submatica $\mathbf{B}$ nemôže určovať krajné optimálne stratégie a hodnotu hry, preto prejdeme k analýze ďalšej štvorcovej submatice. V opačnom prípade dostaneme dvojicu krajných optimálnych stratégií x, y a hodnotu hry v.

Po preskúmaní všetkých štvorcových submatíc $\mathbf{B}$ nájdeme všetky krajné optimálne stratégie hráčov.

Poznámka 2.9

Pri aplikácii metódy netreba skúmať „štvorcové submatice rádu 1", t. j. jednotlivo vybraté prvky matice platieb. Takéto „submatice" určujú čisté optimálne stratégie, ktoré vieme nájsť jednoduchším spôsobom. V tejto súvislosti poznamenávame, že čistá optimálna stratégia (interpretovaná ako jednotková zmiešaná optimálna stratégia) je vždy krajná optimálna stratégia.

Opísaná metóda je z výpočtového hľadiska veľmi náročná. Pre každú štvorcovú submaticu $\mathbf{B}$ treba totiž vypočítať determinant a v prípade, že det $\mathbf{B} \neq 0$, treba nájsť inverznú maticu $\mathbf{B}^{-1}$. SHAPLEY a SNOW zjednodušili výpočtový postup na základe využitia vlastností adjungovanej matice.

Poznámka 2.10

1. Máme štvorcovú maticu $\mathbf{B} = (b_{ij})$ rádu r. Algebrickým doplnkom prvku b_{ij} matice $\mathbf{B}$ nazývame veličinu

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

kde M_{ij} je hodnota determinantu submatice rádu r-1, ktorú dostaneme z matice $\mathbf{B}$ vyčiarknutím i-tého riadka a j-tého stĺpca.

2. Transponovanú maticu algebrických doplnkov prvkov matice $\mathbf{B}$ nazývame adjungovanou maticou k matici $\mathbf{B}$ a označujeme adj ($\mathbf{B}$).

3. Ak matica $\mathbf{B}$ je regulárna, potom platí

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\, \mathbf{B}^{-1}$$

Vzťahy (2.39) až (3.41) môžeme s využitím adjungovanej matice zapísať takto:

$$x_B = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{B})^{(T)} e_r}{e_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, e_r} \tag{2.44}$$

$$y_B = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{B})\, e_r}{e_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, e_r} \tag{2.45}$$

$$v = \frac{\det \mathbf{B}}{e_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, e_r} \tag{2.46}$$

Výhodou využitia adjungovanej matice je, že pri analýze celočíselnej submatice $\mathbf{B}$ môžeme väčšinu výpočtov realizovať v celých číslach. Adjungovaná matica k celočíselnej matici je celočíselná, zatiaľ čo inverzná matica obsahuje spravidla zlomky.

Príklad 2.13

Máme hru s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Shapleyho a Snowovou metódou nájdeme krajné optimálne stratégie hráčov a hodnotu hry.

Všetky prvky matice platieb sú nezáporné. Pretože platí

$$\max_i \min_j a_{ij} = 1$$

hodnota hry je kladná a je splnený predpoklad vety 2.18 (nenulová hodnota hry). Keďže

$$\min \max a_{ij} = 3$$

matica platieb nemá sedlový bod a neexistujú teda čisté optimálne stratégie.

Pri aplikácii Shapleyho a Snowovej metódy treba preskúmať všetky štvorcové submatice rádu 2 (spolu existuje 9 takýchto submatíc) a štvorcovú maticu **A** rádu 3.

Začneme submaticou

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Určíme det $\mathbf{B} = -8$. Submatica **B** je regulárna, preto má zmysel pokračovať v jej analýze. Vypočítame adjungovanú maticu

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a podľa vzťahov (2.44) a (2.45) určíme vektory $\boldsymbol{x}_B$ a $\boldsymbol{y}_B$. Dostaneme

$$\boldsymbol{e}_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, \boldsymbol{e}_r = -4$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B})^{(T)} \boldsymbol{e}_r = (-2,\ -2)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in S_3$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B})\, \boldsymbol{e}_r = (-2,\ -2)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{y}_B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in S_3$$

Vidíme, že podmienka (2.42) je splnená. Podľa vzťahu (2.46) určíme

$$v = 2$$

a porovnáme:

$$\mathbf{A}^{(T)} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \geqq \boldsymbol{e}_n v$$

$$\mathbf{A} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{e}_m v$$

Presvedčili sme sa, že je splnená podmienka (2.43). Skúmaná submatica teda určuje dvojicu krajných optimálnych stratégií a hodnotu hry.

Analyzujme ďalšiu submaticu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Určíme

$$\det(\mathbf{B}) = -3$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, \boldsymbol{e}_r = -1$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B})^{(T)} \boldsymbol{e}_r = (0,\ -1)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{x}_B = (0,\ 1)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{x} = (0,\ 1,\ 0)^{(T)} \in S_3$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{B})\, \boldsymbol{e}_r = (1,\ -2)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{y}_B = (-1,\ 2)^{(T)}$$

$$\boldsymbol{y} = (-1,\ 0,\ 2)^{(T)}$$

Vidíme, že $\boldsymbol{y}$ nie je zmiešaná stratégia, teda nie je splnená podmienka (2.42) a skúmaná submatica neurčuje dvojicu krajných optimálnych stratégií. Prejdeme k analýze ďalšej submatice.

Po preskúmaní všetkých štvorcových submatíc rádu 2 a štvorcovej matice **A** zistíme, že prvý hráč má dve krajné optimálne stratégie

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

a druhý hráč má jedinú krajnú optimálnu stratégiu

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

pričom hodnota hry

$$v = 2$$

Poznámka 2.11

Shapley a Snow dokázali, že s využitím adjungovanej matice možno metódu aplikovať aj na hry s nulovou hodnotou. Vetu 2.18 môžeme pre všeobecný prípad formulovať takto: Optimálne zmiešané stratégie $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ sú krajné optimálne stratégie v hre s maticou platieb **A** a hodnotou v práve vtedy, keď existuje štvorcová submatica **B** rádu r matice **A** tak, že platí

$$\boldsymbol{e}_r^{(T)} \operatorname{adj}(\mathbf{B})\, \boldsymbol{e}_r \neq 0$$

a príslušné vektory $\boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{y}_B$ a veličina v vyhovujú vzťahom (2.44) až (2.46).

2.2 BIMATICOVÉ HRY

Doteraz sme sa zaoberali konečnými hrami dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb, o ktorých sme hovorili aj ako o antagonistických hrách, pretože záujmy jednotlivých hráčov v nich boli diametrálne protikladné.

Upustíme teraz od predpokladu antagonizmu záujmov a budeme skúmať také konfliktné rozhodovacie situácie, v ktorých

a) vystupujú dvaja hráči,

b) každý z hráčov volí jednu z množiny stratégií s cieľom maximalizovať vlastnú platbu,

c) záujmy hráčov nemusia byť v priamom protiklade, t. j. výhra jedného z hráčov nemusí byť sprevádzaná prehrou druhého hráča.

Takéto konflikty nazývame *neantagonistické* a ich matematickým modelom sú tzv. hry dvoch hráčov s nekonštantným súčtom platieb. Konečné hry dvoch hráčov s nekonštantným súčtom platieb nazývame *bimaticové hry*.

Pri definovaní a analýze racionálneho správania hráčov v bimaticových hrách sa stretávame s väčšími komplikáciami ako v prípade maticových hier.

Oboznámime sa so základnými prístupmi k riešeniu neantagonistických hier dvoch hráčov, ktoré v štvrtej kapitole ďalej zovšeobecníme na prípad hier n hráčov.

2.2.1 Základné pojmy o bimaticových hrách

Množiny stratégií prvého a druhého hráča označíme X a Y. Prvý hráč volí (alebo nezávisle, alebo po dohode s druhým hráčom) nejakú svoju stratégiu $\boldsymbol{x} \in X$, druhý hráč volí (alebo nezávisle, alebo po dohode s prvým hráčom) nejakú stratégiu $\boldsymbol{y} \in Y$. Výsledok hry je daný dvojicou stratégií $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times Y$. V závislosti od výsledku hry získava prvý hráč platbu $M_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ a druhý hráč platbu $M_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, pričom existujú také stratégie $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$, že

$$M_1(x_1, y_1) + M_2(x_1, y_1) \neq M_1(x_2, y_2) + M_2(x_2, y_2) \tag{2.49}$$

(teda súčet platieb hráčov pre rôzne výsledky hry nie je konštantný).

Hrou dvoch hráčov s nekonštantným súčtom platieb nazývame model

$$[P = \{1, 2\};\ X, Y;\ M_1, M_2] \tag{2.50}$$

pre ktorý je splnená podmienka (2.49).

V prípade, že množiny X a Y sú konečné, hovoríme o konečnej hre dvoch hráčov s nekonštantným súčtom. Nech indexy

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

usporadúvajú čisté stratégie prvého a druhého hráča. Každému výsledku hry danému dvojicou čistých stratégií (i, j) prvého a druhého hráča zodpovedá platba a_{ij} prvého hráča a platba b_{ji} druhého hráča. Keďže predpokladáme, že ide o hru s nekonštantným súčtom, existuje aspoň jedna dvojica výsledkov

$$(i_1, j_1) \text{ a } (i_2, j_2)$$

taká, že platí

$$a_{i_1 j_1} + b_{j_1 i_1} \neq a_{i_2 j_2} + b_{j_2 i_2} \tag{2.51}$$

Stratégie a platby hráčov v konečnej hre dvoch hráčov môžeme úplne charakterizovať dvojicou matíc

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

typu $m \times n$ a

$$\mathbf{B} = (b_{ji})$$

typu $n \times m$, ktoré nazývame maticami platieb prvého a druhého hráča. Riadky matice **A** zodpovedajú čistým stratégiám prvého hráča a jej stĺpce čistým stratégiám druhého hráča, pričom prvky a_{ij} tejto matice udávajú platby prvého hráča pri výsledkoch (i, j). Analogicky, riadky matice **B** zodpovedajú čistým stratégiám druhého hráča a jej stĺpce čistým stratégiám prvého hráča, pričom prvky b_{ji} tejto matice udávajú platby druhého hráča pri výsledkoch (i, j). Z tejto možnosti reprezentácie konečnej hry dvoch hráčov s nekonštantným súčtom pomocou dvoch matíc bol aj odvodený názov bimaticová hra.

Definícia 2.8

Bimaticovou hrou nazývame model

$$[P = \{1, 2\}; \mathbf{A}, \mathbf{B}] \tag{2.52}$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica platieb prvého hráča typu $m \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{ji})$ je matica platieb druhého hráča typu $n \times m$, pričom pre prvky týchto matíc platí vzťah (2.51).

Príklad 2.19

Dva podniky P_1 a P_2 sa dostali do sporu, na vyriešenie ktorého má každý z nich dve možnosti

a) obrátiť sa na súd a žalovať druhý podnik (stratégia $Ž$),

b) ustúpiť a vyhovieť nárokom druhého podniku (stratégia U).

V *tab. 2.4* uvádzame, aké dôsledky majú tieto rozhodnutia pre jednotlivé podniky. Riadky tabuľky zodpovedajú stratégiám podniku P_1, stĺpce zodpovedajú stratégiám podniku P_2. Dvojicu čísel v príslušnom riadku a stĺpci treba interpretovať tak, že prvé číslo udáva platbu (zisk alebo stratu) podniku P_1 a druhé číslo udáva platbu (zisk alebo stratu) podniku P_2 v prípade, že P_1 zvolí stratégiu zodpovedajúcu tomuto riadku a P_2 zvolí stratégiu zodpovedajúcu tomuto stĺpcu. Napríklad pri voľbe dvojice stratégií $(Ž, U)$ získava podnik P_1, ktorý žaluje podnik P_2, odškodné v sume 9 jednotiek a podnik P_2, ktorý zvolil stratégiu U a rozhodol sa ustúpiť, platí toto odškodné plus súdne výdavky, teda jeho platba je -10 jednotiek.

Tabuľka 2.4

		stratégie P_2 $Ž$	U
stratégie P_1	$Ž$	$-1, -3$	$9, -10$
	U	$-10, 9$	$5, 6$

Z *tab. 2.4* zostavíme matice platieb obidvoch hráčov. Matica platieb prvého hráča (podnik P_1) je

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ž & U \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Ž \\ U \end{array}$$

Matica platieb druhého hráča (podnik P_2) je

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ž & U \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Ž \\ U \end{array}$$

Vypočítame ešte maticu $\mathbf{A} + \mathbf{B}^{(T)}$, ktorá obsahuje súčty platieb hráčov:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}^{(T)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že ide o hru s nekonštantným súčtom.

Pri úvahách o optimálnom rozhodovaní v bimaticovej hre treba vedieť, aké sú možnosti vzájomných záväzných dohôd medzi hráčmi. Ak nie je možné pred voľbou stratégie uzatvoriť záväznú dohodu s protihráčom, zvolia v hre z príkladu 2.19 obidvaja hráči pravdepodobne stratégiu $Ž$, teda výsledkom hry bude $(Ž, Ž)$, pretože jednostranné odchýlenie sa od tohto rozhodnutia znamená pre odchyľujúceho sa hráča riziko, že sa zväčší jeho prehra. Prvý hráč (podnik P_1) môže síce pri stratégii $Ž$ očakávať stratu -1, ale voľbou stratégie U riskuje, že jeho strata bude až -10. Druhý hráč (podnik P_2) môže pri voľbe stratégie $Ž$ očakávať stratu -3, avšak voľbou stratégie U riskuje, že sa jeho strata zvýši na -10.

V prípade, že existuje možnosť uzatvoriť vzájomnú dohodu, bude pre obidvoch hráčov zrejme najvýhodnejšie zvoliť stratégiu U, teda výsledkom hry bude (U, U). Voľba tejto stratégie zabezpečí prvému hráčovi výhru 5 jednotiek a druhému hráčovi výhru 6 jednotiek. Záväznosť dohody je tu však nevyhnutným predpokladom racionálnosti takejto voľby, pretože bez nej nemá prvý hráč pri voľbe stratégie U istotu, že druhý hráč nezvolí $Ž$, čo by pre prvého hráča znamenalo stratu -10 (to isté platí aj pre druhého hráča).

Z uvedenej diskusie teda vidíme, že pri analýze bimaticových hier (a všeobecne hier dvoch hráčov s nekonštantným súčtom) treba skúmať dva prípady:

a) nekooperatívny prípad, keď nie sú prípustné záväzné dohody medzi hráčmi;

b) kooperatívny prípad, keď hráči môžu uzatvárať záväzné dohody o spoločnom postupe.

Poznámka 2.12

V prípade maticovej, resp. všeobecnej hry dvoch hráčov s konštantným súčtom nemajú podobné úvahy zmysel. Keďže súčet platieb obidvoch hráčov je vždy konštantný, nemajú sa hráči o čom dohovárať a kooperatívny prípad je bezpredmetný.

2.2.2 Nekooperatívny prístup — rovnovážne body

V hre (2.50), v ktorej neexistuje možnosť záväznej dohody o spolupráci medzi hráčmi, možno za prijateľnú voľbu stratégií prvého a druhého hráča považovať takú dvojicu stratégií, ktorá sa sama ponúka v tom zmysle, že jej jednostranné porušenie vedie k poškodeniu hráča, ktorý ju poruší. Matematicky môžeme tento princíp rozhodovania vyjadriť pomocou tzv. rovnovážneho bodu.

Definícia 2.9

Rovnovážnym bodom hry (2.50) nazývame takú dvojicu stratégií $\mathbf{x}_0 \in X$ a $\mathbf{y}_0 \in Y$, že pre všetky $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{y} \in Y$ súčasne platí

$$M_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \geqq M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$$

$$M_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \geqq M_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$

Stratégie $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{y}_0$ nazývame *rovnovážne stratégie* prvého a druhého hráča a veličiny $M_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ a $M_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ nazývame *rovnovážne platby* prvého a druhého hráča v hre (2.50).

Aplikujme definíciu 2.9 na bimaticovú hru (2.52).

Definícia 2.10

Rovnovážnym bodom bimaticovej hry (2.52) v čistých stratégiách nazývame takú dvojicu čistých stratégií (i_0, j_0) prvého a druhého hráča, že pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ súčasne platí

$$a_{i_0 j_0} \geqq a_{i j_0}$$

$$b_{j_0 i_0} \geqq b_{j i_0}$$

Čisté stratégie i_0 a j_0 nazývame čisté rovnovážne stratégie prvého a druhého hráča a veličiny

$$a_{i_0 j_0}, \; b_{j_0 i_0}$$

nazývame rovnovážne platby prvého a druhého hráča v bimaticovej hre.

Prakticky nájdeme rovnovážny bod v čistých stratégiách tak, že určíme dvojicu indexov (i_0, j_0), pre ktorú je prvok

$$a_{i_0 j_0}$$

maximálnym prvkom stĺpca j_0 matice $\mathbf{A}$ a prvok

$$b_{j_0 i_0}$$

je maximálnym prvkom stĺpca i_0 matice $\mathbf{B}$.

Príklad 2.20

V bimaticovej hre z príkladu 2.19 je zrejme rovnovážnym bodom v čistých stratégiách dvojica indexov

$$(i_0, j_0) = (1, 1)$$

pretože zodpovedajúce prvky matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$

$$a_{11} = -1, \; b_{11} = -3$$

sú maximálne prvky svojich stĺpcov. Je to jediný rovnovážny bod tejto hry.

Príklad 2.21

Preskúmajme bimaticovú hru s maticami platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Presvedčíme sa o tom, že táto hra nemá rovnovážny bod v čistých stratégiách.

a) Pre dvojicu čistých stratégií $(i, j) = (1, 1)$ je síce $a_{11} = 2$ maximom prvého stĺpca matice $\mathbf{A}$, avšak zodpovedajúci prvok $b_{11} = -1$ nie je maximom v prvom stĺpci matice $\mathbf{B}$.

b) Pre dvojicu čistých stratégií $(i, j) = (1, 2)$ nie je prvok $a_{12} = -1$ maximom v svojom stĺpci matice $\mathbf{A}$, teda bez ohľadu na to, či b_{21} je, alebo nie je maximálnym prvkom svojho stĺpca, nemôže byť táto dvojica čistých stratégií rovnovážnym bodom.

c) Pre dvojicu čistých stratégií $(i, j) = (2, 1)$ nie je prvok $a_{21} = -2$ maximálnym prvkom svojho stĺpca v matici $\mathbf{A}$.

d) Pre dvojicu čistých stratégií $(i, j) = (2, 2)$ je síce prvok $a_{22} = 4$ maximom v svojom stĺpci, avšak prvok $b_{22} = 1$ nie je maximom svojho stĺpca.

Vidíme teda, že ani jedna z dvojíc čistých stratégií nevyhovuje definícii sedlového bodu.

Z príkladu 2.21 vyplýva, že existujú bimaticové hry, ktoré nemajú rovnovážne body v čistých stratégiách. Preto, podobne ako v maticovej hre, má zmysel uvažovať o používaní zmiešaných stratégií.

Nech

$$S_m = \left\{ \boldsymbol{x} \in E_m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqq 0 \right\}$$

je množina zmiešaných stratégií prvého hráča a

$$S_m = \left\{ \boldsymbol{y} \in E_n,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geqq 0 \right\}$$

je množina zmiešaných stratégií druhého hráča v bimaticovej hre. Funkcie

$$E_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$$

$$E_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} y_j x_i$$

definované na karteziánskom súčine $S_m \times S_n$ nazývame funkciami stredných hodnôt platieb prvého a druhého hráča v bimaticovej hre.

Definícia 2.11

Rovnovážnym bodom bimaticovej hry v zmiešaných stratégiách nazývame takú dvojicu $\boldsymbol{x}^{(0)} \in S_m$ a $\boldsymbol{y}^{(0)} \in S_n$ zmiešaných stratégií prvého a druhého hráča, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in S_m$ a $\boldsymbol{y} \in S_n$ súčasne platí

$$E_1(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \geqq E_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

$$E_2(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \geqq E_2(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y})$$

Veličiny

$$v_1 = E_1(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

$$v_2 = E_2(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$$

nazývame rovnovážne stredné hodnoty platieb prvého a druhého hráča a stratégie $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{y}^{(0)}$ nazývame rovnovážne zmiešané stratégie prvého a druhého hráča v bimaticovej hre.

Možno dokázať, že každá bimaticová hra má aspoň jeden rovnovážny bod v zmiešaných stratégiách.

Algoritmy na výpočet rovnovážnych bodov v bimaticových hrách vychádzajú z teórie nelineárneho programovania. Opierajú sa o nasledujúce tvrdenie:

Veta 2.22

Nutná a postačujúca podmienka na to, aby dvojica $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in S_m \times S_n$ bola rovnovážnym bodom bimaticovej hry v zmiešaných stratégiách je existencia čísel u_0 a v_0 tak, že platí:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(0)} - u_0 \leqq 0 \tag{2.53}$$

$$x_i^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(0)} - u_0 \right) = 0 \tag{2.54}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ji} x_i^{(0)} - v_0 \leqq 0 \tag{2.55}$$

$$y_j^{(0)} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ji} x_i^{(0)} - v_0 \right) = 0 \tag{2.56}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} = 1 \tag{2.57}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(0)} = 1 \tag{2.58}$$

$$x_i^{(0)} \geqq 0 \tag{2.59}$$

$$y_j^{(0)} \geqq 0 \tag{2.60}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dôkaz tejto vety a algoritmy výpočtu rovnovážnych bodov bimaticových hier v zmiešaných stratégiách pozri napr. v [39].

Ukážeme, ako hľadať rovnovážne body v zmiešaných stratégiách v najjednoduchšom prípade bimaticových hier s maticami platieb typu 2×2. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

sú matice platieb prvého a druhého hráča. Možno ukázať, že ak platí

$$(b_{22} - b_{12})(b_{11} - b_{21}) > 0 \tag{2.63}$$

$$(a_{22} - a_{12})(a_{11} - a_{21}) > 0 \tag{2.64}$$

potom bimaticová hra s maticami platieb (2.61) až (2.62) má rovnovážny bod $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$ v zmiešaných stratégiách. Rovnovážnu stratégiu prvého hráča

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

určíme podľa vzťahov

$$x_1^{(0)} = \frac{b_{22} - b_{12}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} \tag{2.65}$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b_{11} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}} \tag{2.66}$$

Rovnovážnu stratégiu druhého hráča

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$$

určíme podľa vzťahov

$$y_1^{(0)} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{2.67}$$

$$y_2^{(0)} = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{2.68}$$

Rovnovážne stredné hodnoty platieb prvého a druhého hráča určíme podľa vzorcov

$$v_1 = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{2.69}$$

$$v_2 = \frac{b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}} \tag{2.70}$$

Príklad 2.22

Hra z príkladu 2.21 s maticami platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nemá čisté rovnovážne stratégie.

Overíme splnenie podmienok (2.63) až (2.64). Vidíme, že

$$b_{22} - b_{12} = 1 - 3 = -2$$

$$b_{11} - b_{21} = -1 - 2 = -3$$

teda

$$(b_{22} - b_{12})(b_{11} - b_{21}) = 6$$

a podmienka (2.63) je splnená. Ďalej platí

$$a_{22} - a_{12} = 4 - (-1) = 5$$

$$a_{11} - a_{21} = 2 - (-2) = 4$$

teda

$$(a_{22} - a_{12})(a_{11} - a_{21}) = 20$$

a podmienka (2.64) je splnená.

Podľa vzťahov (2.65) až (2.66) určíme rovnovážnu stratégiu prvého hráča

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

a podľa vzťahu (2.69)

$$v_1 = \frac{2}{3}$$

je rovnovážna stredná hodnota platieb prvého hráča.

Podľa vzťahov (2.67) až (2.68) určíme rovnovážnu stratégiu druhého hráča

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

a podľa vzťahu (2.70)

$$v_2 = \frac{7}{5}$$

je rovnovážna stredná hodnota platieb druhého hráča.

Na záver tohto odseku ilustrujme na príkladoch niektoré problémy súvisiace s interpretáciou rovnovážnych bodov ako riešení bimaticovej hry.

Príklad 2.23

Bimaticová hra s maticami platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

má dva rovnovážne body v čistých stratégiách:

$$(i_0^{(1)}, j_0^{(1)}) = (1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{11} = 2 \quad \text{a} \quad b_{11} = 1$$

a

$$(i_0^{(2)}, j_0^{(2)}) = (2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{22} = 3 \quad \text{a} \quad b_{22} = 4$$

Vidíme, že pre obidvoch hráčov je výhodnejší druhý rovnovážny bod. Pravidlo rovnovážneho bodu poskytuje teda v danom prípade prijateľný návod na správanie hráčov v bimaticovej hre.

Príklad 2.24

Preskúmajme bimaticovú hru s maticami platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Táto hra má dva rovnovážne body v čistých stratégiách:

$$(i_0^{(1)}, j_0^{(1)}) = (1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{11} = 2, \qquad b = -4$$

a

$$(i_0^{(2)}, j_0^{(2)}) = (2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{22} = -4, \qquad b_{22} = 6$$

V tejto hre prvý hráč zrejme uprednostní prvý rovnovážny bod, zatiaľ čo druhý hráč preferuje druhý rovnovážny bod. Ak však každý hráč zvolí svoju čistú stratégiu z rovnovážneho bodu pre neho najvýhodnejšieho, dostaneme výsledok

$$(i_0^{(1)}, j_0^{(2)}) = (1, 2)$$

ktorému zodpovedajú platby hráčov

$$a_{12} = -8, \qquad b_{21} = -8$$

teda najhorší možný výsledok hry.

Z príkladov 2.23 a 2.24 vidíme, že rovnovážny bod síce môže v niektorých prípadoch poskytnúť optimálne riešenie bimaticovej hry, v iných prípadoch je však jeho použitie problematické. Pri analýze bimaticových hier treba preto zachovávať náležitú opatrnosť.

2.2.3 Kooperatívny prístup — jadro hry

Predpokladajme teraz, že v hre (2.50) môžu hráči uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií a o prípadnom prerozdelení spoločne získanej výhry. Takúto hru nazývame *kooperatívnou hrou* dvoch hráčov s prenosnými platbami. V súvislosti s analýzou kooperatívnej hry nás zaujíma odpoveď na nasledujúce tri otázky:

a) *Kedy má zmysel uzatvárať dohodu?*

b) *O voľbe akých stratégií sa hráči dohodnú?*

c) *Ako si hráči rozdelia spoločne získanú výhru?*

Preskúmajme najprv otázku a)

Dohodu je zrejme účelné uzatvoriť vtedy, ak hráči spoluprácou získajú viac ako samostatným postupom.

Samostatným postupom si prvý hráč v hre (2.50) vždy môže zabezpečiť platbu

$$v(1) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.71}$$

Druhý hráč si môže samostatným postupom vždy zabezpečiť platbu

$$v(2) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} M_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.72}$$

Na základe spolupráce môžu hráči spoločne získať

$$v(1, 2) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (M_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + M_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \tag{2.73}$$

Uzatvorenie dohody o spolupráci medzi hráčmi je zrejme účelné vtedy, ak

$$v(1, 2) > v(1) + v(2)$$

Hru (2.50) nazývame podstatnou, ak platí

$$v(1,2) > v(1) + v(2)$$

a nepodstatnou, ak platí

$$v(1, 2) = v(1) + v(2)$$

Z hľadiska kooperatívneho prístupu má zmysel skúmať iba podstatné hry.

Odpovieme ďalej na otázku b)

Zrejmé je, že v prípade dohody o spolupráci budú hráči voliť také stratégie, ktoré im zabezpečia spoločnú platbu $v(1, 2)$, teda také stratégie $\boldsymbol{x}_0 \in X$ a $\boldsymbol{y}_0 \in Y$, pre ktoré platí

$$M_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + M_2(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = v(1, 2)$$

Zostáva nám ešte odpoveď na otázku c)

Označme p_1, resp. p_2 sumu, ktorú v súlade s dohodou dostane zo spoločnej výhry $v(1, 2)$ prvý, resp. druhý hráč. Vektor

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$$

nazveme rozdelením platieb v bimaticovej hre. Pre hráčov sú prijateľné iba také rozdelenia, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= v(1, 2) \\ p_1 \quad &\geqq v(1) \\ p_2 &\geqq v(2) \end{aligned} \tag{2.74}$$

Množinu všetkých prijateľných rozdelení, určených sústavou (2.74), nazývame jadrom kooperatívnej hry dvoch hráčov. Každé rozdelenie, ktoré patrí do jadra hry, má tieto vlastnosti:

1. Hráči si rozdelia celú spoločnú výhru.
2. Každý z hráčov požaduje aspoň toľko, koľko by si zabezpečil samostatným postupom bez spolupráce s druhým hráčom.

V podstatnej hre dvoch hráčov nie je jadro hry určené jednoznačne (množinou všetkých rozdelení z jadra hry je úsečka), treba teda ešte navrhnúť výber konkrétneho rozdelenia platieb z jadra. Teória odporúča napr. tento princíp výberu spravodlivého rozdelenia: Každý z hráčov si ponechá toľko, koľko by získal samostatným postupom, a o zvyšok sa hráči rozdelia rovnakým dielom.

Zhrnieme výsledky našej analýzy.

Definícia 2.12

a) Optimálnymi stratégiami hráčov v podstatnej hre (2.50) nazývame ich stratégie $\boldsymbol{x}_0 \in X$ a $\boldsymbol{y}_0 \in Y$, pre ktoré platí

$$v(1, 2) = M_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + M_2(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$$

b) Rozdelenie

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$$

nazývame optimálnym rozdelením hráčov v podstatnej hre (2.50), ak platí

$$p_1^{(0)} = v(1) + \frac{1}{2}[v(1, 2) - v(1) - v(2)]$$

$$p_2^{(0)} = v(2) + \frac{1}{2}[v(1, 2) - v(1) - v(2)]$$

Uvedenú teóriu môžeme bezprostredne aplikovať na bimaticovú hru (2.52). V tomto prípade

$$v(1) = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$v(2) = \max_j \min_i b_{ji}$$

$$v(1, 2) = \max_{i,j} (a_{ij} + b_{ji})$$

Príklad 2.25

Preskúmajme bimaticovú hru z príkladu 2.21 s maticami platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že v tejto hre sú prípustné záväzné dohody medzi hráčmi. Určíme

$$\begin{aligned} v(1) &= -1 \\ v(2) &= 1 \\ v(1, 2) &= 5 \end{aligned}$$

Vidíme, že hra je podstatná, spolupráca hráčov má teda zmysel. Optimálnymi stratégiami prvého a druhého hráča v tejto hre sú čisté stratégie

$$i_0 = 2, \qquad j_0 = 2$$

ktoré zabezpečujú spoločnú platbu $v(1, 2)$. Každé prijateľné rozdelenie platieb musí vyhovovať sústave

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 5 \\ p_1 \quad &\geqq -1 \\ p_2 &\geqq 1 \end{aligned}$$

V súlade s definíciou 2.12 bude optimálnym rozdelením platieb v skúmanej hre

$$p_1^{(0)} = -1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$p_2^{(0)} = \quad 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

2.2.4 Rovnovážne body v bimaticových hrách a úlohy kvadratického programovania

Podobne, ako existuje tesná súvislosť medzi maticovými hrami a úlohami lineárneho programovania, možno ukázať na vzťahy medzi problémom vyhľadania rovnovážnych bodov v bimaticových hrách a úlohami kvadratického programovania.

S cieľom kompaktnosti ďalšieho výkladu použijeme tento maticový zápis množín S_m a S_n a funkcií E_1, E_2 v bimaticovej hre s maticami platieb **A** a **B**:

$$S_m = \{\boldsymbol{x} \in R_m,\ \boldsymbol{e}_m^{(T)}\boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geqq 0\}$$

$$S_n = \{\boldsymbol{y} \in R_n,\ \boldsymbol{e}_n^{(T)}\boldsymbol{y} = 1,\ \boldsymbol{y} \geqq 0\}$$

$$E_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{(T)}\mathbf{A}\boldsymbol{y}$$

$$E_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{(T)}\mathbf{B}\boldsymbol{x}$$

kde $\boldsymbol{e}_m$, resp. $\boldsymbol{e}_n$ je m-rozmerný, resp. n-rozmerný stĺpcový súčtový vektor (t.j. vektor, ktorého všetky zložky sú jednotkové).

S využitím tejto symboliky môžeme nutné a postačujúce podmienky (2.53) až (2.60) pre rovnovážne body v bimaticovej hre zapísať takto:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_m u \leqq 0 \tag{2.75}$$

$$\boldsymbol{x}^{(T)}(\mathbf{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_m u) = 0 \tag{2.76}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n v \leqq 0 \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{y}^{(T)}(\mathbf{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n v) = 0 \tag{2.78}$$

$$\boldsymbol{e}_m^{(T)}\boldsymbol{x} = 1 \tag{2.79}$$

$$\boldsymbol{e}_n^{(T)} = \boldsymbol{y} = 1 \tag{2.80}$$

$$\boldsymbol{x} \geqq 0 \tag{2.81}$$

$$\boldsymbol{y} \geqq 0 \tag{2.82}$$

Označme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & c & \dots & c \\ c & c & \dots & c \\ \vdots & & & \\ c & c & \dots & c \end{pmatrix}$$

maticu typu $m \times n$, kde c je ľubovoľná konštanta. Preskúmame matice

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}^{(T)} - \mathbf{B}$$

Položme

$$p = c - u$$

$$r = c - v$$

Sústavu (2.75) až (2.82) môžeme upraviť takto:

$$\mathbf{F}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_m p \geqq 0 \tag{2.83}$$

$$\mathbf{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n r \geqq 0 \tag{2.84}$$

$$\boldsymbol{e}_m^{(T)}\boldsymbol{x} = 1 \tag{2.85}$$

$$\boldsymbol{e}_n^{(T)}\boldsymbol{y} = 1 \tag{2.86}$$

$$\boldsymbol{x} \geqq 0 \tag{2.87}$$

$$\boldsymbol{y} \geqq 0 \tag{2.88}$$

$$\boldsymbol{x}^{(T)}(\mathbf{F}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_m p) + \boldsymbol{y}^{(T)}(\mathbf{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n r) = 0 \tag{2.89}$$

Konštantu c možno zvoliť tak, aby všetky prvky matíc **F** a **G** boli kladné. Potom budú pre všetky riešenia sústavy (2.83) až (2.89) kladné aj veličiny p a r. Vzhľadom na to môžeme sústavu (2.83) až (2.89) upraviť substitúciou

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{r}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{q} = \frac{1}{p}\boldsymbol{y}$$

Po dosadení dostaneme

$$\mathbf{F}\boldsymbol{q} \geqq \boldsymbol{e}_m \tag{2.90}$$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{e}_n \tag{2.91}$$

$$\boldsymbol{w} \geqq 0 \tag{2.92}$$

$$\boldsymbol{q} \geqq 0 \tag{2.93}$$

$$\boldsymbol{w}^{(T)}(\mathbf{F}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{e}_m) + \boldsymbol{q}^{(T)}(\mathbf{G}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{e}_n) = 0 \tag{2.94}$$

Možno dokázať nasledujúce tvrdenie: Dvojica $\boldsymbol{w}^{(0)}$, $\boldsymbol{q}^{(0)}$ je riešením sústavy (2.90) až (2.94) práve vtedy, ak také vektory $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{y}^{(0)}$ a také skaláry $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, že

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = r^{(0)}\boldsymbol{w}^{(0)}, \qquad \boldsymbol{y}^{(0)} = p^{(0)}\boldsymbol{z}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{u}^{(0)} = c - p^{(0)}, \qquad \boldsymbol{v}^{(0)} = c - r^{(0)}$$

kde

$$\boldsymbol{r}^{(0)} = \frac{1}{\boldsymbol{e}_m^{(T)}\boldsymbol{w}^{(0)}}, \qquad p^{(0)} = \frac{1}{\boldsymbol{e}_n^{(T)}\boldsymbol{q}^{(0)}}$$

sú riešením sústavy Kuhnových—Tuckerových podmienok (2.75) až (2.82).

Ak teda chceme nájsť rovnovážny bod bimaticovej hry s maticami platieb **A** a **B**, musíme nájsť jedno z riešení príslušnej sústavy (2.90) až (2.94) s kladnými maticami **F** a **G**.

M. Maňas v [42] ukázal, že riešenia sústavy (2.90) až (2.94) možno hľadať ako optimálne riešenia nasledujúcej úlohy kvadratického programovania:

Minimalizovať

$$f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^{(T)}(\mathbf{F} + \mathbf{G}^{(T)})\,\boldsymbol{q} - \boldsymbol{e}_m^{(T)}w - \boldsymbol{e}_n^{(T)}\boldsymbol{q} \tag{2.95}$$

za podmienok

$$\mathbf{G}\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{e}_n \tag{2.96}$$

$$\mathbf{F}\boldsymbol{q} \geqq \boldsymbol{e}_m \tag{2.97}$$

$$\boldsymbol{w} \geqq 0 \tag{2.98}$$

$$\boldsymbol{q} \geqq 0 \tag{2.99}$$

Všimnime si, že úlohy (2.95) až (2.99) nie sú konvexnými úlohami kvadratického programovania, z čoho vyplývajú určité ťažkosti. Riešenie úloh však zjednoduší skutočnosť, že poznáme minimálnu hodnotu účelovej funkcie (ktorá sa rovná 0).

2.3 EKONOMICKÉ APLIKÁCIE KONEČNÝCH HIER DVOCH HRÁČOV

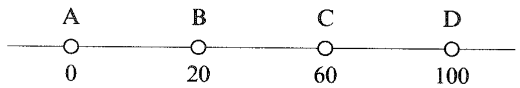
Bezprostredné ekonomické aplikácie teórie maticových hier podmieňuje antagonistický charakter modelovaných konfliktných situácií. Ekonomické rozhodovacie situácie, ktoré možno modelovať ako maticové hry, resp. ako všeobecnejšie hry dvoch hráčov s konštantným súčtom, vznikajú tam, kde je ostrá konkurencia medzi ekonomickými subjektmi, čo je typické predovšetkým pre podmienky trhovej ekonomiky.

Oveľa väčší význam majú nepriame aplikácie výsledkov teórie maticových hier v iných oblastiach optimálneho rozhodovania. Ide najmä o využitie minmaxového princípu pri riešení problémov ekonomického rozhodovania za neurčitosti, o použitie niektorých herných princípov pri hľadaní kompromisných riešení v úlohách viackriteriálnej optimalizácie a o použití prístupov teórie maticových hier v dekompozičných algoritmoch riešenia špeciálnych úloh lineárneho programovania.

Ďalej uvádzame dva príklady aplikácie teórie hier dvoch hráčov. Prvý príklad je typickou ilustráciou herných modelov konkurenčného rozhodovania.

Príklad 2.26

Predpokladajme, že dve konkurujúce si firmy I a II uvažujú o umiestnení podniku služieb (napr. hotela, predajne alebo autoservisu) pozdĺž nejakej línie (napr. diaľnice). Obidve firmy majú prostriedky na vybudovanie jedného podniku, pričom každá firma môže postaviť podnik s prakticky postačujúcou kapacitou (z hľadiska dopytu po službách, ktorý môže v danej oblasti vzniknúť). Predpokladajme ďalej, že existujú štyri vhodné miesta na zriadenie príslušných podnikov, ktoré označíme ako A, B, C a D. Vzdialenosti medzi nimi a ich polohu znázorňuje *obr. 2.1.*



Obr. 2.1

Ukážeme, akým spôsobom si firmy v závislosti od umiestnenia podniku rozdelia úhrnný dopyt. Predpokladáme, že dopyt, ktorý zodpovedá nejakému úseku línie, je proporcionálny jeho dĺžke. Objasníme princíp rozdelenia kontroly nad dopytom na konkrétnom príklade z *obr. 2.1.*

Ak firma I vstúpi na trh v bode B a firma II v bode C, firma I kontroluje 40 % úhrnného dopytu (vzdialenosť AB a polovica vzdialenosti BC) a firma II kontroluje 60 % úhrnného dopytu (polovica vzdialenosti BC a vzdialenosť CD). Ak firmy lokalizujú svoje podniky v rovnakom bode, predpokladáme, že na každú z nich pripadá polovica úhrnného dopytu.

Problém optimálnej lokalizácie podniku služieb s cieľom maximalizovať podiel na úhrnnom dopyte sformulujeme ako maticovú hru. Firmu I pokladáme za prvého hráča a firmu II za druhého hráča. Každá z firiem má 4 čisté stratégie — umiestniť podnik služieb v A, B, C alebo D. Platby určíme kontrolovaným podielom úhrnného dopytu (v %).

Maticu platieb prvého hráča obsahuje *tab. 2.5.*

Zrejmé je, že ide o hru s konštantným súčtom $c = 100$.

Tabuľka 2.5

	A	B	C	D
A	50	10	30	50
B	90	50	40	60
C	70	60	50	80
D	50	40	20	50

Vidíme, že hra s maticou platieb z *tab. 2.5* má sedlový bod v čistých stratégiách

$$(i_0, j_0) = (3, 3)$$

a hodnotu

$$v = 50$$

Pre obidve firmy je teda optimálne vybudovať podnik služieb v bode C. Každá firma má potom istotu, že bude kontrolovať 50 % z úhrnného dopytu. V ľubovoľnom inom bode riskuje, že bude kontrolovať menej ako 50 % úhrnného dopytu.

Druhým príkladom je aplikácia teórie maticových hier pri riešení lineárnej úlohy viackriteriálnej optimalizácie. Úlohu lineárneho programovania s viacerými účelovými funkciami možno formulovať napr. takto:

Určiť kompromisné riešenie, ktoré rešpektuje tendenciu maximalizovať t lineárnych funkcií

$$f_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_k^{(T)}\boldsymbol{x} \tag{2.100}$$

za podmienok

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b} \tag{2.101}$$

$$\boldsymbol{x} \geqq 0 \tag{2.102}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, t$,

$\boldsymbol{c}_k$ — n-rozmerné stĺpcové vektory koeficientov účelových funkcií,
$\mathbf{A}$ — matica typu $m \times n$,
$\boldsymbol{b}$ — m-rozmerný stĺpcový vektor pravých strán sústavy ohraničení,
$\boldsymbol{x}$ — n-rozmerný stĺpcový vektor premenných.

Účelové funkcie (2.100) sú vo všeobecnom prípade konfliktné v tom zmysle, že neexistuje prípustné riešenie, ktoré by maximalizovalo súčasne všetky funkcie. Zvyšovanie hodnoty jednej z funkcií môže byť sprevádzané znižovaním hodnôt niektorých z ostatných funkcií. Treba teda nájsť také prípustné riešenie, ktoré je v určitom zmysle kompromisom medzi prípustnými riešeniami, ktoré maximalizujú jednotlivé, izolovane skúmané účelové funkcie.

Teória maticových hier nám v niektorých prípadoch poskytuje návod na „rozumnú" definíciu kompromisných riešení, rešpektujúcich viaceré účelové funkcie. Ďalej uvádzame prístup, ktorého autorom je H. JÜTTLER, pozri [35].

Nech $\boldsymbol{x}^{(k)}$ je optimálne riešenie jednokriteriálnej úlohy lineárneho programovania

$$\max \{\boldsymbol{c}_k^{(T)}\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq 0\} \tag{2.103}$$

v ktorej je účelovou funkciou k-tá funkcia z (2.100). Veličinu

$$f_k(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

budeme ďalej nazývať realizáciou k-tého cieľa, alebo jednoducho k-tým cieľom. Budeme predpokladať, že pre všetky $k = 1, 2, \ldots, t$ platí

$$f_k(\boldsymbol{x}^{(k)}) \neq 0$$

Zrejmé je, že pre $k \neq s$ platí

$$f_k(\boldsymbol{x}^{(k)}) \geqq f_k(\boldsymbol{x}^{(s)})$$

t. j. optimálne riešenie úlohy (2.103) z hľadiska jednej účelovej funkcie nie je spravidla jej optimálnym riešením z hľadiska inej účelovej funkcie.

Preskúmame veličinu

$$g_{ks} = \left| \frac{f_k(\boldsymbol{x}^{(k)} - f_k(\boldsymbol{x}^{(s)})}{f_k(\boldsymbol{x}^{(k)})} \right|$$

ktorú nazveme normovanou odchýlkou riešenia $\boldsymbol{x}^{(s)}$ od cieľa f_k. Veličina

$$g_{ks} \cdot 100$$

udáva percentuálnu odchýlku hodnoty k-tej účelovej funkcie v s-tom čiastkovom optimálnom riešení od optimálnej hodnoty k-tej účelovej funkcie. Zrejmé je, že $g_{ks} \geqq 0$.

Analyzujme maticovú hru s maticou platieb

$$\mathbf{G} = (g_{ks})$$

kde $k = 1, 2, \ldots, t$, $s = 1, 2, \ldots, t$. Hru môžeme interpretovať tak, že prvý hráč (nadriadený orgán) volí ciele f_k a druhý hráč (ekonomický subjekt, ktorý sa rozhoduje) volí riešenia x_s. Druhý hráč sa usiluje o to, aby maximálna normovaná odchýlka od jednotlivých cieľov bola čo najnižšia.

Nech v je hodnota hry s maticou platieb $\mathbf{G}$ a vektor

$$\boldsymbol{q}^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_t^{(0)})$$

je optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča v tejto hre. Ak v úlohách (2.100) až (2.102) zvolíme ako kompromisné riešenie vektor

$$x^{(0)} = \sum_{s=1}^{t} q_s^{(0)} x^{(s)} \tag{2.104}$$

potom odchýlka od ktoréhokoľvek z cieľov nebude väčšia ako $v \,.\, 100\,\%$, pričom túto odchýlku nemožno výberom inej kombinácie čiastkových optimálnych riešení znížiť. Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$, definovaný vzťahom (2.104), môžeme teda považovať za prijateľné kompromisné riešenie úlohy (2.100) až (2.102).

Príklad 2.27

Preskúmajme úlohu lineárneho programovania so sústavou ohraničení

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ x_1 &\geqq 0 \\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

a maximalizačnými cieľovými kritériami

$$f_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2$$
$$f_2(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + x_2$$

Určíme optimálne riešenie jednokriteriálnych úloh lineárneho programovania (2.103), v ktorých sú účelovými funkciami jednotlivé cieľové kritériá f_1 a f_2. Pre kritérium f_1 dostaneme

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (2, 2)$$

a pre kritérium f_2 dostaneme

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = (4, 0)$$

Vypočítame

$$f_1(\boldsymbol{x}^{(1)}) = 10, \qquad f_1(\boldsymbol{x}^{(2)}) = 8$$
$$f_2(\boldsymbol{x}^{(1)}) = 8, \qquad f_2(\boldsymbol{x}^{(2)}) = 12$$

určíme ďalej

$$g_{11} = 0, \qquad g_{12} = \frac{1}{5}$$
$$g_{21} = \frac{1}{3}, \qquad g_{22} = 0$$

Preskúmame maticovú hru s maticou platieb

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča v tejto hre je vektor

$$\boldsymbol{q}^{(0)} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$$

a hodnota hry

$$v = \frac{1}{8}$$

Podľa (2.104) určíme kompromisné riešenie

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{8}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ak v skúmanej viackriteriálnej optimalizačnej úlohe zvolíme toto kompromisné riešenie, potom percentuálna odchýlka hodnôt cieľových kritérií od jednotlivých cieľov neprevýši veličinu

$$v \,.\, 100\,\% = 12{,}5\,\%$$

3 NEKONEČNÉ HRY DVOCH HRÁČOV

Táto kapitola je venovaná nekonečným hrám dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb. Hry tohto typu nie sú v súčasnosti tak dobre rozpracované ako konečné hry dvoch hráčov, zaujímavé sú však z aplikačného hľadiska. Aplikácie nekonečných hier sa využívajú najmä vo vojenskej oblasti, ale aj v ekonomike a v rozhodovacích situáciách v čase. Analýza nekonečných hier závisí od tvaru funkcie platieb, preto pre ich riešenie nemožno odvodiť všeobecne platné závery.

Najprv uvedieme základné pojmy o nekonečných hrách dvoch hráčov, niektoré definície a vety. Ďalej preskúmame existenciu riešenia v takýchto hrách, ako aj problémy spojené s jeho nájdením v hrách s niektorými typmi funkcií platieb. V závere uvedieme prehľad možných aplikácií týchto hier.

3.1 ZÁKLADNÉ POJMY A DEFINÍCIE

Hry dvoch hráčov, v ktorých množina stratégií aspoň jedného z nich je nekonečná, nazývame *nekonečné hry*. Takéto hry môžeme zadať podobným spôsobom ako konečné hry dvoch hráčov, teda pomocou množín stratégií a funkcií platieb hráčov.

S prípadmi, v ktorých hráči musia uskutočňovať voľby z nekonečných množín variantov (stratégií), sa stretávame často v modeloch vojenských, ekonomických a iných rozhodovacích situácií. Pri analýze a hľadaní riešenia týchto modelov vychádzame z poznatkov opísaných v predchádzajúcej kapitole, pričom uvedieme len hlavné rozdiely a problémy.

Uvedieme niekoľko príkladov, ktoré reprezentujú modely nekonečných hier dvoch hráčov.

Príklad 3.1

Predpokladajme, že dve firmy, ktoré označíme A a B, súťažia o trhy v n rozličných krajinách. Každá firma investovala už v minulosti určitú sumu peňazí na propagáciu svojich výrobkov, zavedenie servisu a pod. Okrem toho každá firma má v súčasnosti k dispozícii určitú sumu peňazí, ktorú chce venovať na ďalšiu propagáciu svojich výrobkov a rozvoj služieb.

Predpokladajme, že obidve firmy vynakladajú prostriedky na propagáciu

a rozvoj služieb rovnako účelne, takže súhrnný objem objednávok v každej krajine sa medzi nimi rozdelí proporcionálne, podľa investovaných súm peňazí. Treba vypočítať, koľko z celkovej sumy peňazí určenej na propagáciu má každá firma dodať k vynaloženým prostriedkom, aby maximalizovala súhrnný objem objednávok.

Zostavíme matematický model uvedeného problému. Označíme jednotlivé krajiny indexom $i = 1, 2, \dots, n$. Nech

s_i je úhrnný objem objednávok v i-tej krajine v peňažnom vyjadrení,

a_i a b_i sú prostriedky vynaložené v minulosti firmami A a B v i-tej krajine,

a, resp. b je celková suma na nové investície a propagáciu, ktorou disponuje firma A, resp. firma B,

x_i a y_i sú novovynaložené prostriedky firiem A a B v i-tej krajine.

Firma A (prvý hráč) má potom množinu stratégií

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in E_n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = a,\ x_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

a firma B (druhý hráč) má množinu stratégií

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in E_n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ y_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Podľa uvedených predpokladov získa firma A v i-tej krajine objem objednávok

$$\frac{(x_i + a_i)\, s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}$$

Súhrnný objem objednávok, získaných firmou A vo všetkých krajinách bude

$$M_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i + a_i)\, s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}$$

Podobne súhrnný objem objednávok získaných firmou B vo všetkých krajinách bude

$$M_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i + b_i)\, s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}$$

Predpokladajme, že pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$a_i + b_i > 0$$

t. j. vo všetkých krajinách firmy investovali už v minulosti. Dostali sme model hry dvoch hráčov. Zrejmé je, že ide o nekonečnú hru, pretože množiny stratégií hráčov X a Y sú nekonečné, t. j. existuje nekonečne veľa spôsobov rozdelenia prostriedkov na propagáciu.

Príklad 3.2

Počas veľtrhu vystavovateľ chce predať určitý výrobok, o ktorý majú záujem dvaja zákazníci (prvý a druhý hráč). Každý z nich vo vhodnom čase môže predložiť návrh na kúpu výrobku. Ak sa kúpa neuskutoční, tak zákazník nemôže svoju ponuku opakovať. Ku koncu veľtrhu je vystavovateľ ochotnejší svoj výrobok predať, pretože nádej na výhodnejšiu ponuku klesá. Pre zákazníkov vzniká otázka, kedy treba predložiť ponuku, aby nádej na kúpu výrobku bola čo najväčšia. Zrejmé je, že čakanie s ponukou zvyšuje záujem predať výrobok, súčasne však zvyšuje riziko, že druhý zákazník ho kúpi skôr.

Nech čas trvania veľtrhu je jednotkový. Ochotu vystavovateľa charakterizuje rastúca funkcia $P_1(x)$, definovaná na intervale $\langle 0, 1\rangle$, ktorá udáva pravdepodobnosť kúpy prvého zákazníka, ak urobí ponuku v čase x. Podobne nech $P_2(y)$ je rastúca funkcia na intervale $\langle 0, 1\rangle$, ktorá udáva pravdepodobnosť, že druhý zákazník kúpi výrobok, ak urobí ponuku v čase y (za predpokladu, že sa výrobok už predtým nepredal). Okrem toho nech $P_1(1) = P_2(1) = 1$ (t. j. ak ponuka príde ku koncu veľtrhu, výrobok sa určite predá).

Ak zákazník získa výrobok, jeho platba bude 1 a platba druhého zákazníka bude -1. Ďalej predpokladajme, že ak jeden zo zákazníkov kupuje výrobok skôr než druhý a vystavovateľ jeho ponuku odmietne, druhý zákazník sa to dozvie a počká s ponukou až do konca veľtrhu, keď určite získa výrobok.

Množiny stratégií hráčov budú

$$X = \{x : x \in \langle 0, 1\rangle\}$$

$$Y = \{y : y \in \langle 0, 1\rangle\}$$

Funkcie platieb určíme takto: Ak prvý hráč predloží ponuku skôr ako druhý hráč ($x < y$), tak získa platbu 1 s pravdepodobnosťou $1 - P_1(x)$. Stredná hodnota jeho platby bude

$$P_1(x) + (-1)(1 - P_1(x)) = 2P_1(x) - 1$$

Ak predloží ponuku skôr druhý hráč ($y < x$), potom stredná hodnota jeho platby bude

$$(-1)P_2(y) + 1(1 - P_2(y)) = 1 - 2P_2(y)$$

Za predpokladu, že ponuku predkladajú súčasne obidvaja hráči ($x = y$), stredná hodnota platby bude

$$\frac{1}{2}(P_1(x) + (1 - P_2(x))P_1(x) - \frac{1}{2}(P_2(x) - P_1(x))P_2(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

Príklad 3.3

Nekonečná hra dvoch hráčov s nulovým súčtom platieb je daná takto. Množiny stratégií prvého a druhého hráča sú množiny celých kladných čísel. Po uskutočnení voľby i-tej stratégie prvým hráčom a j-tej stratégie druhým hráčom (voľba i-tého a j-tého celého čísla) zaplatí druhý hráč prvému hráčovi sumu a_{ij}, ktorá je daná niektorou funkciou platieb.

Môžeme uviesť mnoho príkladov, ktorých riešenie vyžaduje použiť modely nekonečných hier. Napríklad je zrejmé, že rozpočet štátu (oblasti) možno rozdeliť nekonečne veľkým množstvom spôsobov. Podobne tovar môže mať nekonečne veľa cien alebo rozmerov. Vo vojenskej vede možno niektoré situácie modelovať ako hry typu súboj. V takých situáciách ide o rozhodovanie v čase. Okrem toho aj v prípade, keď treba voliť z konečných, ale z veľkých množín stratégií, je niekedy výhodné použiť na ich analýzu metódy nekonečných hier.

Ukážeme, aké problémy by mohli vzniknúť, keby sme chceli definovať niektoré základné pojmy pre nekonečné hry dvoch hráčov priamym rozšírením pojmov známych z konečných hier. Zmiešanou stratégiou prvého hráča v hre z príkladu 3.3 nazveme postupnosť $(x_1, x_2, \ldots)$, ktorá vyhovuje podmienkam

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1 \qquad x_i \geqq 0, \ i = 1, 2, \ldots$$

Podobne zmiešanou stratégiou druhého hráča nazveme postupnosť $(y_1, y_2, \ldots)$, ktorá vyhovuje podmienkam

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j = 1 \qquad y_j \geqq 0, \ j = 1, 2, \ldots$$

Ak prvý hráč používa zmiešanú stratégiu x a jeho protivník používa zmiešanú stratégiu y, funkciu platieb môžeme zapísať ako

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j$$

kde a_{ij} je platba prvému hráčovi, ak volí i-tu stratégiu a protivník volí j-tu stratégiu.

Na rozdiel od konečných hier dvoch hráčov sa môže stať, že táto funkcia platieb nemusí byť definovaná pre všetky x a y, pretože tento rad nemusí konvergovať, a už vôbec nie absolútne. Možno uviesť príklad, keď funkcia platieb bude divergentná. Okrem toho môže nastať prípad, keď sumy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_j a_{ij} x_i$$

existujú, ale sú rôzne. Taktiež množiny zmiešaných stratégií nemusia byť kompaktné,[1] a preto maximum a minimum týchto veličín neexistuje. Tieto ťažkosti sa ešte výraznejšie prejavujú pri zavádzaní zmiešaných stratégií na všeobecnejšie nekonečné hry.

Nebudeme skúmať nekonečné hry dvoch hráčov všeobecne, ale sústredíme pozornosť iba na špeciálne triedy takýchto hier. Jedna z nich reprezentuje nekonečné hry dvoch hráčov, v ktorých každý hráč má iba jeden ťah a má kontínuum[2] čistých stratégií. Tieto stratégie môžeme všeobecne predstaviť ako body uzavretého intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Čistá stratégia je potom niektoré reálne číslo z tohto intervalu.

Definícia 3.1

Nekonečnú hru, v ktorej prvý hráč má možnosť voliť stratégiu x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a druhý hráč stratégiu y z toho istého intervalu, pričom funkcia platieb je reálna funkcia $M(x, y)$ definovaná na množine $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, nazývame hrou na jednotkovom štvorci.

Zrejmé je, že ak hráči volia zmiešané stratégie y a x, prvý hráč získa sumu $M(x, y)$ a druhý hráč získa sumu $c - M(x, y)$ (ak je to hra s konštantným súčtom platieb).

Nekonečné hry dvoch hráčov boli prvý raz skúmané v [47]. Teória nekonečných hier bola ďalej rozvinutá v [16, 36 a 51].

Ukážeme optimálny spôsob hrania v nekonečných hrách dvoch hráčov podobným spôsobom ako pre konečné hry dvoch hráčov. Najprv preskúmame voľby čistých stratégií hráčov. Predpokladajme, že spojitá funkcia platieb $M(x, y)$ má minimum podľa premennej y pre každé x a maximum podľa premennej x pre každé y. Teda existuje veličina

$$\min_y \max_x M(x, y)$$

Potom prvý hráč má zaručené, že v najhoršom prípade získa

$$\min_y M(x, y)$$

Prvý hráč však môže voliť svoju stratégiu ľubovoľným spôsobom, a teda

[1] Množina $X \subset M$ (z metrického priestoru M) sa nazýva kompaktná, ak každá postupnosť $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $x_i \in X$ obsahuje konvergentnú podpostupnosť.

[2] Nekonečná množina, ktorá je ekvivalentná množine všetkých reálnych čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, sa nazýva kontínuum.

i tak, aby táto veličina bola čo najväčšia. Inými slovami, môže hrať tak, že má zaručené získanie aspoň

$$\max_x \min_y M(x, y)$$

Podobne môžeme dokázať, že druhý hráč môže hrať tak, že v najhoršom prípade neprehrá viac ako

$$\min_y \max_x M(x, y)$$

Ako sme ukázali v predchádzajúcej kapitole, medzi týmito veličinami platí vzťah

$$\max_x \min_y M(x, y) \leqq \min_y \max_x M(x, y)$$

V prípade rovnosti týchto veličín, t.j. ak

$$\max_x \min_y M(x, y) = \min_y \max_x M(x, y) = M(x_0, y_0)$$

funkcia $M(x, y)$ má sedlový bod v bode (x_0, y_0).

Pretože stratégie x_0 a y_0 vyhovujú nerovniciam

$$M(x, y_0) \leqq M(x_0, y_0) \leqq M(x_0, y)$$

pre všetky x a y, stratégiu x_0 nazývame čistou optimálnou stratégiou prvého hráča a stratégiu y_0 čistou optimálnou stratégiou druhého hráča. Teda, ak funkcia platieb má sedlový bod, existuje riešenie nekonečnej hry v čistých stratégiách.

Príklad 3.4

Majme hru, v ktorej prvý hráč volí číslo $x \in \langle 0, 1\rangle$ a druhý hráč nezávisle od voľby protivníka volí číslo $y \in \langle 0, 1\rangle$. Po uskutočnení volieb zaplatí druhý hráč prvému sumu

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2$$

Môžeme sa ľahko presvedčiť, že táto funkcia má sedlový bod v bode (1, 1). Preto čistou optimálnou stratégiou prvého hráča bude voľba $x = 1$ a čistou optimálnou stratégiou druhého hráča bude voľba $y = 1$. Tieto stratégie zabezpečia, že platba prvého hráča nebude nižšia ako 1 a že druhý hráč neprehrá viac ako 1 (hodnotu hry).

Teraz sformulujeme pojem zmiešanej stratégie v nekonečných hrách dvoch hráčov. Ako sme už ukázali, priame rozšírenie tohto pojmu z konečných hier na nekonečné nie je možné.

Zrejmé je, že aj pre nekonečné hry dvoch hráčov zmiešané stratégie hráča predstavujú súčasne niektoré pravdepodobnostné rozdelenie na množine jeho čistých stratégií, avšak táto množina je nekonečná. Z tohto dôvodu nemožno určiť zmiešanú stratégiu pravidlom, ktoré pripisuje istú pravdepodobnosť každému prvku tejto množiny. Pripomenieme si nasledujúci pojem z matematickej štatistiky.

Definícia 3.2

Nech a je náhodná premenná a x je ľubovoľné reálne číslo. Potom pravdepodobnosť, že $a \leqq x$ predstavuje neklesajúcu, sprava spojitú funkciu premennej x, ktorá sa nazýva distribučná funkcia $F(x)$ veličiny a

$$F(x) = P(x \leqq x)$$

Definícia 3.3

Zmiešanou stratégiou prvého hráča v nekonečnej hre na jednotkovom štvorci rozumieme náhodný proces voľby niektorého čísla a ($0 \leqq a \leqq 1$), ktoré neprevyšuje dané číslo $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Taká stratégia potom predstavuje distribučnú funkciu uvedenú v predchádzajúcej definícii.

Funkcia $F(x)$ je pravdepodobnosť, že číslo volené pomocou náhodného procesu F nebude prevyšovať číslo x. Pre ďalšie úvahy a teoretické uzávery je vhodné doplniť predchádzajúce definície o prípad, ak $x = 0$. Predpokladáme, že $F(0) = 0$, t. j. $F(0)$ je pravdepodobnosť, že volené číslo bude menšie ako 0, a nie nanajvýš rovnajúce sa 0.

Možno ľahko dokázať, že ak x_1 a x_2 sú také dve čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, že $0 < x_1 < x_2 \leqq 1$, potom platí

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < a \leqq x_2)$$

čo je pravdepodobnosť, že zvolené číslo a je z intervalu $x_1 < a \leqq x_2$. Rovnako

$$F(x_2) - F(0) = P(0 \leqq a \leqq x_2)$$

je pravdepodobnosť, že zvolené číslo a bude z intervalu $\langle 0, x_2 \rangle$.

Takúto distribučnú funkciu nazývame kumulatívnou. Jej vlastnosti môžeme zhrnúť do týchto bodov

1. $F(x) \geqq 0$, pre $0 < x \leqq 1$
2. $F(0) = 0$.
3. $F(1) = 1$.
4. F je neklesajúca funkcia premennej x, teda ak $x_1 < x_2$, potom aj $F(x_1) \leqq F(x_2)$.

5. F je sprava spojitá funkcia vo všetkých bodoch otvoreného intervalu $(0, 1)$, teda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(x + \varepsilon) = F(x)$$

Toto tvrdenie vyplýva zo vzťahu

$$F(x - \varepsilon) - F(x) = P\{x \leqq a \leqq x + \varepsilon\}$$

Inými slovami, pre ľubovoľné zadané číslo a možno nájsť také číslo $\varepsilon > 0$, aby sa splnila nerovnosť v zátvorke. Pravdepodobnosť, že a vyhovuje tejto nerovnosti, sa blíži nule, keď sa ε blíži nule.

Zrejmé je, že existuje veľa distribučných funkcií s takýmito vlastnosťami. Množinu všetkých distribučných funkcií označíme D.

Najjednoduchším príkladom distribučnej funkcie je funkcia $F(x) = x$. Ďalej možno dokázať, že hoci distribučná funkcia je spojitá sprava, v niektorých bodoch môže byť aj nespojitá. Príkladom takejto funkcie je napríklad funkcia

$$F(x) = \frac{1}{2} x, \qquad \text{pre } x < \frac{1}{3}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 + x), \qquad \text{pre } x \geqq \frac{1}{3}$$

Táto funkcia je nespojitá v bode $x = \frac{1}{3}$.

Iným príkladom distribučnej funkcie tohto typu je stupňovitá funkcia, ktorú možno definovať takto. Majme takú postupnosť bodov intervalu

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

že distribučná funkcia F je nespojitá v každom z týchto bodov a je konštantná vo všetkých iných bodoch. Triedu takých stupňovitých funkcií s n stupňami označíme ako D_n. Potom je zrejmé, že prvky D_1 majú jeden stupeň a na ich určenie stačí uviesť jeden bod nespojitosti. Nech I_a je prvok množiny D_1 s bodom nespojitosti $x = a$. Potom I_a pre $a \neq 0$ vyhovuje podmienkam

$$I_a(x) = 0, \qquad \text{pre } x < a$$

$$I_a(x) = 1, \qquad \text{pre } x > a$$

Napríklad funkcia I_0 vyhovuje podmienkam

$$I_0(0) = 0$$

$$I_0(x) = 1, \qquad \text{pre } x > 0.$$

Jednoducho možno dokázať, že ak $F_1, F_2, \dots, F_n$ je n distribučných funkcií, potom aj ich ľubovoľná konvexná kombinácia je distribučná funkcia, teda

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + \dots + c_nF_n(x)$$

kde $c_i \geqq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$, a ich súčet je rovný 1.

Poznamenávame, že podobným spôsobom, akým sme definovali zmiešanú stratégiu prvého hráča, možno definovať aj zmiešanú stratégiu druhého hráča. Ďalej preskúmame pojem strednej hodnoty platby.

Máme nekonečnú hru dvoch hráčov na jednotkovom štvorci s funkciou platieb $M(x, y)$. Ak druhý hráč volí svoju čistú stratégiu y_0 a prvý hráč volí stratégiu x, platba prvého hráča bude

$$H(x) = M(x, y_0)$$

Predpokladajme, že prvý hráč volí číslo x podľa distribučnej funkcie F. Úloha spočíva v určení strednej hodnoty jeho platby. Zrejmé je, že stredná hodnota platby sa nedá vyčísliť ako suma súčinov $H(x)F(x)$, kde $F(x)$ je pravdepodobnosť, že bude zvolené číslo x. Na nájdenie strednej hodnoty platby možno použiť nasledujúci postup: Interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdelíme na niekoľko subintervalov a strednú hodnotu nájdeme ako súčet stredných hodnôt vyčíslených pre každý interval. Rozdeľme interval $\langle 0, 1\rangle$ bodmi $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Potom strednú hodnotu platby prvého hráča môžeme približne vypočítať ako

$$\sum_{i=1}^{n} H(z_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

kde $z_i \in < x_{i-1}, x_i >$ pre $1 < i \leqq n$. Ak sú splnené určité predpoklady na funkciu H a rozdiely $x_i - x_{i-1}$ sa blížia nule s rastom n, môžeme ju vypočítať s akoukoľvek presnosťou.

Definícia 3.4

Nech Δ označuje rozdelenie intervalu $\langle a, b\rangle$ bodmi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, pričom

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

a nech

$$\Delta' = \max_{1 \leqq i \leqq n} (x_i - x_{i-1})$$

Potom, ak existuje

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta' \to 0}} \sum_{i=1}^{n} H_i(z_i) F(x_i) - F(x_{i-1})$$

kde $x_{i-1} \leqq z_i \leqq x_i$, $i = 1, \dots, n$, a nezávisí od voľby z_i, táto limita sa nazýva Stieltjesov integrál[1] funkcie G podľa F od a do b a označuje sa

$$\int_a^b G(x)\,dF(x)$$

Z predchádzajúceho vysvetlenia vyplýva, že presná hodnota strednej platby prvého hráča v nekonečnej hre dvoch hráčov na jednotkovom štvorci bude daná Stieltjesovým integrálom funkcie G podľa F od 0 do 1. Ak druhý hráč používa čistú stratégiu y a prvý hráč uskutočňuje voľbu v súlade s distribučnou funkciou F (používa zmiešanú stratégiu F), stredná hodnota platby bude

$$E(F, y) = \int_0^1 M(x, y)\,dF(x)$$

Ak prvý hráč používa čistú stratégiu x a druhý hráč uskutočňuje voľbu v súlade s niektorou distribučnou funkciou G (používa zmiešanú stratégiu G), stredná hodnota platby bude

$$E(x, G) = \int_0^1 M(x, y)\,dG(y)$$

Nakoniec, ak prvý hráč používa zmiešanú stratégiu F a druhý hráč používa zmiešanú stratégiu G, stredná hodnota platby bude

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\,dF(x)\,dG(y) \qquad (3.1)$$

za predpokladu, že všetky tieto integrály existujú, Ak existujú, potom platí aj (pozri napr. [46])

$$E(F, G) = \int_0^1 E(F, y)\,dG(y) = \int_0^1 E(x, G)\,dF(x)$$

Ďalej preskúmame možnosti existencie optimálnych zmiešaných stratégií v nekonečných hrách na jednotkovom štvorci. Nech $M(x, y)$ je funkcia platieb a prvý hráč volí stratégiu $x \in \langle 0, 1\rangle$ a druhý hráč stratégiu $y \in \langle 0, 1\rangle$ pomocou zodpovedajúcich distribučných funkcií $F(x)$ a $G(y)$. Stredná hodnota platby je určená výrazom (3.1).

[1] Stieltjesov integrál nemusí vždy existovať. Napríklad neexistuje, ak G a F sú nespojité v jednom bode. Možno však dokázať, že ak funkcia G je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a F je neklesajúca, tento integrál existuje. Vlastnosti tohto integrálu, ako aj ich podobnosti s Riemanovým integrálom sú podrobnejšie opísané napr. v [46].

Označme

$$v_1 = \sup_F \inf_y E(F, y) \tag{3.2}$$

$$v_2 = \inf_G \sup_x E(x, G) \tag{3.3}$$

Vznikajú otázky, či $v_1 = v_2$ a či možno zameniť sup inf za max min a inf sup za min max. Ak je odpoveď na obidve otázky kladná, tak existujú optimálne zmiešané stratégie hráčov (podobne ako v konečnej hre dvoch hráčov). Ak však platí len $v_1 = v_2$, môžeme dokázať, že hra síce má hodnotu hry, ale nemá optimálne zmiešané stratégie.[1]

Predpokladajme, že existujú aj veličiny

$$\max_F \min_G E(F, G) = v_1 \tag{3.4}$$

$$\min_G \max_F E(F, G) = v_2 \tag{3.5}$$

Potom existuje taká distribučná funkcia F_0 pre prvého hráča, pri ktorej, ak uskutoční voľbu v súlade s touto funkciou, v najhoršom prípade získa platbu v_1. Analogicky existuje taká distribučná funkcia G_0 pre druhého hráča, že ak tento hráč volí svoje stratégie podľa nej, zabráni, aby prvý hráč získal viac ako v_2.

Všeobecne platí, že $v_1 \leqq v_2$. Preto, aby $v_1 = v_2 = v$, je nevyhnutné a postačujúce (ako sme ukázali pre konečné hry dvoch hráčov), aby funkcia $E(F, G)$ mala sedlový bod. Teda rovnosť platí, ak existujú také distribučné funkcie F a G, že

$$E(F, G_0) \leqq E(F_0, G_0) \leqq E(F_0, G) \tag{3.6}$$

Definícia 3.5

Optimálnou zmiešanou stratégiou prvého hráča v nekonečnej hre na jednotkovom štvorci nazývame distribučnú funkciu F_0 a optimálnou zmiešanou stratégiou druhého hráča nazývame distribučnú funkciu G_0, ak vyhovujú nerovniciam (3.6).

Definícia 3.6

Riešením nekonečnej hry dvoch hráčov na jednotkovom štvorci nazveme trojicu (F_0, G_0, v), kde F_0 je optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča, G_0 je optimálna zmiešaná stratégia druhého hráča a $v = E(F_0, G_0)$ je hodnota hry.

---

[1] Možno dokázať, že v tomto prípade existujú ε-optimálne stratégie, t. j. pre dané číslo $\varepsilon > 0$ existujú také zmiešané stratégie F a G, že $E(F, y) > v - \varepsilon$ a $E(x, G) < v + \varepsilon$ pre ľubovoľné $x, y \in [0, 1]$ (pozri napríklad [50]).

Preskúmajme teraz otázku existencie riešenia v nekonečných hrách dvoch hráčov. Pre konečné hry dvoch hráčov (maticové) z vety o minmaxe vyplývalo, že každá taká hra má riešenie v zmiešaných stratégiách. Takúto všeobecnú vetu však nemožno sformulovať pre nekonečné hry dvoch hráčov. Pre niektoré špeciálne funkcie platieb však riešenie existuje aj v nekonečných hrách.

Existencia riešenia pre nekonečnú hru na jednotkovom štvorci so spojitou funkciou platieb vyplýva z nasledujúcej vety.

Veta 3.1

Nech je daná nekonečná hra dvoch hráčov na jednotkovom štvorci so spojitou funkciou platieb $M(x, y)$. Potom sup inf a inf sup vo výrazoch (3.2) a (3.3) môžeme zameniť za max min a min max. Okrem toho veličiny

$$\max_F \min_G \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, \mathrm{d}F(x)\, \mathrm{d}G(y)$$

$$\min_G \max_F \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, \mathrm{d}F(x)\, \mathrm{d}G(y)$$

existujú a rovnajú sa.

Dôkaz tejto vety je uvedený napríklad v [46]. Z vety vyplýva, že riešenie nekonečných hier dvoch hráčov na jednotkovom štvorci existuje pre dostatočne veľký počet funkcií platieb. Hlavný problém je však v nájdení optimálneho riešenia. Zatiaľ nie sú známe všeobecné metódy pre nájdenie riešenia v nekonečných hrách, aj keď je známe, že daná hra má riešenie. V súčasnosti sa preto výskum teórie nekonečných hier zameriava na rozvoj analytických metód na nájdenie ich riešenia. V tomto smere sa už dosiahol určitý pokrok. Problémy riešenia nekonečných hier preskúmame v nasledujúcom odseku.

Podobne ako pre konečné hry aj pre nekonečné hry dvoch hráčov môžeme sformulovať niektoré vlastnosti optimálnych stratégií, ktoré možno využiť pri hľadaní riešenia týchto hier alebo pri preverovaní optimálnosti daného riešenia. Tieto vlastnosti môžeme sformulovať ako nasledujúce vety (dôkazy sú uvedené napríklad v [46]).

Veta 3.2

Nech $M(x, y)$ je spojitá funkcia platieb v nekonečnej hre dvoch hráčov. Potom distribučné funkcie F_0 a G_0 sú optimálnymi stratégiami prvého a druhého hráča vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $y \in \langle 0, 1 \rangle$ a ľubovoľné $x \in \langle 0, 0 \rangle$ platia vzťahy

$$v \leqq \int_0^1 M(x, y)\, \mathrm{d}F_0(x) \quad \text{a} \quad \int_0^1 M(x, y)\, \mathrm{d}G_0(y) \leqq v$$

kde v je hodnota hry.

Veta 3.3

Nech $M(x, y)$ je spojitá funkcia platieb nekonečnej hry dvoch hráčov na jednotkovom štvorci, v je hodnota tejto hry a F_0 a G_0 sú optimálne stratégie hráčov. Označíme

$$H_0(x) = \int_0^1 M(x, y)\,dG_0(y)$$

a

$$K_0(y) = \int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x)$$

Potom

$$\max_x H_0(x) = \min_y K_0(y) = v$$

Inými slovami, pre každého hráča existuje aspoň jedna taká čistá stratégia, ktorej použitie proti optimálnej stratégii protivníka dáva hodnotu hry.

Veta 3.4

Nech $M(x, y)$ je spojitá funkcia platieb nekonečnej hry dvoch hráčov na jednotkovom štvorci a v je hodnota hry. Nech $K_0(y)$ a $H_0(x)$ označujú rovnaké veličiny ako vo vete 3.3. Ak

$$H_0(x_0) < v, \quad \text{potom} \quad P\{a = x_0\} = 0$$

a

$$K_0(y_0) > v, \quad \text{potom} \quad P\{a = y_0\} = 0$$

Okrem toho ľubovoľná čistá stratégia, ktorá vchádza do optimálnej zmiešanej stratégie hráča, dáva najmenej hodnotu hry, ak ju hráč použije proti optimálnej stratégii protivníka. Teda, ak

$$P\{a = x_0\} > 0, \quad \text{potom} \quad H_0(x_0) = v$$

Na nasledujúcich príkladoch objasníme, ako môžeme uvedené vlastnosti optimálnych stratégií použiť pri overovaní optimálnosti riešenia v nekonečných hrách dvoch hráčov.

Príklad 3.5

Máme hru na jednotkovom štvorci s funkciou platieb

$$M(x, y) = (x - y)^2$$

Dokážeme, že optimálna stratégia prvého hráča spočíva vo voľbe $x = 0$ a $x = 1$ s rovnakou pravdepodobnosťou a optimálna stratégia druhého hráča spočíva vo voľbe $y = \frac{1}{2}$. To znamená, že

$$F_0(x) = \frac{1}{2} I_0(x) + \frac{1}{2} I_1(x) \quad \text{a} \quad G_0(y) = I_{\frac{1}{2}}(y)$$

Potom môžeme zapísať

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\,dG_0(y) = \max_x M\left(x, \frac{1}{2}\right) = \max_x \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\min_y \int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x) = \min_y \left[\frac{1}{2} M(0, y) + \frac{1}{2} M(1, y)\right] =$$

$$= \min\left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}(1 - y)^2\right] = \frac{1}{4}$$

Podľa vety 3.3 platí rovnica

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\,dG_0(y) = \min_y \int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x) = \frac{1}{4}$$

Teda G_0 a F_0 určujú optimálne stratégie hráčov a $v = \frac{1}{4}$ hodnotu hry. Stredná hodnota platby bude

$$H_0(x) = \int_0^1 M(x, y)\,dG_0(y) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$K_0(y) = \int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x) = \frac{1}{2}[y^2 + (1 - y)^2]$$

$$\max H_0(x) = H_0(0) = H_0(1) = \frac{1}{4}$$

$$\min K_0(y) = K_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Potom platí

$$H_0(x) < \frac{1}{4}, \quad \text{pre všetky} \quad x \neq 0, 1 \quad \text{a} \quad K_0(y) > \frac{1}{4}, \quad y \neq \frac{1}{2}$$

čo sme mali dokázať.

Príklad 3.6

Nech funkcia platieb v nekonečnej hre dvoch hráčov na jednotkovom štvorci je daná takto:

$$M(x, y) = |y - x|(1 - |y - x|)$$

Dokážeme, že optimálne stratégie hráčov sú distribučné funkcie $F_0(x) = x$ a $G_0(y) = y$. Môžeme zapísať

$$H_0(x) = \int_0^1 M(x, y)\,\mathrm{d}F_0(y) = \int_0^1 |y - x|(1 - |y - x|)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=0}^{x} (x - x^2 + 2xy - y - y^2)\,\mathrm{d}y + \int_{y=x}^{y=1} (y - y^2 +$$

$$+ 2xy - x - x^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}$$

$$K_0(y) = \int_0^1 M(x, y)\,\mathrm{d}F_0(x) = \int_0^1 |y - x|(1 - |y - x|)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

Vidíme teda, že stredná hodnota platby je rovnaká pre obidvoch hráčov. Preto $F_0(x) = x$ a $G_0(y) = y$ sú optimálne zmiešané stratégie a $v = \frac{1}{6}$ je hodnota hry.

Poznamenáme, že okrem vety 3.1 sú z literatúry známe iné vety o minmaxe pre nekonečné hry dvoch hráčov. Napríklad je dokázaná veta o minmaxe pre bilineárnu funkciu platieb, pre kvázi konkávno-konvexnú funkciu platieb, pre konkávno-konvexné funkcie platieb a iné. Tieto vety o minmaxe pre nekonečné hry sú uvedené napríklad v [50].

3.2 METÓDY RIEŠENIA NEKONEČNÝCH HIER

Ako sme už uviedli, na riešenie nekonečných hier dvoch hráčov neexistuje nijaká univerzálna metóda. Známe je, že riešenie nekonečnej hry nemusí vôbec existovať. V literatúre boli metódy riešenia nekonečných hier navrhnuté len pre hry s niektorými špeciálnymi typmi funkcií platieb (konvexné, konkávno-konvexné, separovateľné a pod.). Preskúmame preto hry s funkciami platieb tohto typu.

Najprv si pripomenieme, že reálnu funkciu f nazývame konvexnou v intervale (a, b), ak pre ľubovoľné číslo λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ a ľubovolnú dvojicu čísel y_1, y_2 platí nerovnica

$$f[\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2] \leqq \lambda f(y_1) + (1 - \lambda) f(y_2)$$

Ak pre $\lambda \neq 0, 1$, pričom $y_1 \neq y_2$, táto nerovnica sa spĺňa ako ostrá, potom funkciu f nazývame rýdzo konvexnou.[1]

Podobne môžeme definovať aj konvexnú funkciu n premenných. Okrem toho z diferenciálneho počtu je známe, že diferencovateľná funkcia f je konvexná vtedy a len vtedy, keď matica zostavená z druhých derivácií

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)$$

je nezáporne definitná. Ak je táto matica kladne definitná[2], potom f je rýdzo konvexná.

Predpokladajme, že funkcia platieb $M(x, y)$ je rýdzo konvexná funkcia premennej y pre ľubovoľné x a má druhú deriváciu podľa y. Potom pre ľubovoľnú distribučnú funkciu F je funkcia

$$K(y) = \int_0^1 M(x, y)\,\mathrm{d}F(x)$$

tiež rýdzo konvexná. Toto je zrejmé, pretože ak M má druhú deriváciu podľa y, možno ľahko dokázať, že

$$\frac{\partial^2 K(y)}{\partial y^2} > 0$$

Veta 3.5

Nech f je rýdzo konvexná funkcia na uzavretom intervale. Potom táto funkcia dosahuje minimálnu hodnotu presne v jednom bode tohto intervalu.

Dôkaz

Pretože f je spojitá funkcia, dosahuje svoju minimálnu hodnotu aspoň v jednom bode uzavretého intervalu. Ak predpokladáme, že dosahuje minimum v dvoch rôznych bodoch a, b, musí platiť

$$f\left(\frac{(a + b)}{2}\right) < \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a) = f(a)$$

čo protirečí predpokladu o tom, že v bode a sa dosahuje minimum.

---

[1] Geometricky možno konvexnú funkciu interpretovať tak, že jej graf neprechádza vyššie ako je úsečka priamky spájajúca jej ľubovolné dva body. Graf rýdzo konvexnej funkcie prechádza nižšie od tejto úsečky.

[2] Matica **A** sa nazýva kladne definitná ak $x^T \mathbf{A} x > 0$, pre všetky nenulové $x \in E_n$. **A** je nezáporne definitná, ak $x^T \mathbf{A} x \geqq 0$.

Veta 3.6

Nech $M(x, y)$ je funkcia platieb nekonečnej hry na jednotkovom štvorci, ktorá je spojitá podľa dvoch premenných a rýdzo konvexná podľa y pre ľubovoľné x. Potom existuje jediná optimálna strtégia pre druhého hráča. Inými slovami, existuje také číslo $a \in \langle 0, 1 \rangle$, že jediná optimálna stratégia druhého hráča je stupňovitá funkcia I_a.

Dôkaz tejto vety možno nájsť napr. v [46].

Ak upustíme od podmienok rýdzej konvexnosti, aj potom platí väčšina predchádzajúcich tvrdení (pozri napr. [50]). V prípade všeobecnej konvexnej funkcie platieb optimálne stratégie hráčov nebudú jednoznačné.

Príklad 3.7

Máme nekonečnú hru dvoch hráčov s funkciou platieb

$$M(x, y) = (x - y)^2$$

Keďže

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} = 2$$

táto funkcia je konvexná podľa y pre ľubovoľné x. Hodnota hry

$$v = \min \max (x - y)^2 = \min \max [y^2, (1 - y)^2] = \frac{1}{2}$$

Optimálna stratégia druhého hráča je $y_0 = \dfrac{1}{2}$, pretože minimalizuje veličinu

$$\max [y^2, (1 - y)^2]$$

Optimálna stratégia prvého hráča je taká zmiešaná stratégia, že

$$M\left(x, \frac{1}{2}\right) = v \quad \text{alebo} \quad \left(x, -\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Z toho vyplýva, že $x = 0$ a 1. Pre určenie λ a $1 - \lambda$ riešime rovnicu

$$\lambda M'\left(0, \frac{1}{2}\right) + (1 - \lambda) M'\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

Riešením nájdeme $\lambda = 1/2$. Preto optimálna stratégia prvého hráča je daná distribučnou funkciou

$$F_0(x) = \frac{1}{2} I_0(x) + \frac{1}{2} I_1(x)$$

Preskúmame ďalej konkávno-konvexné hry.

Definícia 3.7

Hra na jednotkovom štvorci sa nazýva konkávno-konvexná, ak jej funkcia platieb $M(x, y)$ je konkávna podľa x pre ľubovoľné y a konvexná podľa y pre ľubovoľné x.

Veta 3.7

Nech je daná konkávno-konvexná hra dvoch hráčov so spojitou funkciou platieb $M(x, y)$. Taká hra má riešenie v čistých stratégiách.

Dôkaz

Podľa vety 3.1 táto hra má optimálne stratégie. Nech F je optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča a G je optimálna zmiešaná stratégia druhého hráča. Označíme

$$x_0 = \int_0^1 x \, dF(x) \quad \text{a} \quad y_0 = \int_0^1 y \, dG(y)$$

Pretože predpokladáme konkávnosť funkcie M, pre zadané $\bar{y}$ existuje také číslo λ, že funkcia

$$D_y(x) = M(x, y) - \lambda x$$

dosahuje maximálnu hodnotu v bode x_0. Potom môžeme zapísať

$$E(F, y) = \int_0^1 (D_y(x) + \lambda x) \, dF(x)$$

alebo

$$E(F, y) = \int_0^1 D_y(x) \, dF(x) + \lambda \int_0^1 x \, dF(x)$$

Keďže funkcia D_y dosahuje maximálnu hodnotu v bode x_0 (pri fixovanom y), prvý integrál v poslednom výraze neprevyšuje $D_y(x_0)$. Preto

$$E(F, y) \leqq D_y(x_0) + \lambda x_0 = M(x_0, y)$$

Z toho vyplýva, že x_0 je aspoň taká dobrá stratégia ako F, proti y. Podobne môžeme ukázať, že y_0 je prinajmenej taká dobrá stratégia ako G proti ľubovoľnému x. Preto x_0 a y_0 sú čisté optimálne stratégie.

Poznamenávame, že v dôkaze sme použili zmiešané stratégie. Za predpokladu rýdzej konvexnosti a konkávnosti možno vetu 3.7 dokázať len pomocou čistých stratégií (pozri napr. [50]).

Príklad 3.8

Máme nekonečnú hru dvoch hráčov s funkciou platieb

$$M(x, y) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y$$

Potom

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x^2} = -4 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} = 2$$

Preto hra je konkávno-konvexná. Ak derivujeme

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial x} = -4x + 3y - 1$$

a výsledok prirovnáme nule, dostávame

$$x = \frac{3y - 1}{4}$$

Táto hodnota premennej x bude maximalizovať funkciu M. Avšak maximum v jednotkovom intervale nemusí vždy existovať. Hodnota x bude záporná, ak $y < \frac{1}{3}$. V takom prípade sa maximum dosahuje pre $x = 0$. Teda

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y < \frac{1}{3} \\ \frac{3y - 1}{4} & \text{ak } y \geqq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Podobne ak derivujeme $M(x, y)$ podľa y a prirovnáme nule, dostaneme

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2 - 3x}{2} & \text{ak } x \leqq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{ak } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Preto ľahko nájdeme optimálne stratégie hráčov a hodnotu hry

$$x_0 = \frac{4}{17}, \qquad y_0 = \frac{11}{17}, \qquad v = \frac{13}{17}$$

Medzi najjednoduchšie hry na jednotkovom štvorci, pre ktoré sú známe metódy riešenia, patria polynomické hry. Tieto sú podrobnejšie opísané napríklad v [46].

Definícia 3.8

Nech je daná hra dvoch hráčov na jednotkovom štvorci. Ak funkcia platieb má tvar

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i(x) s_j(y) \tag{3.7}$$

kde funkcie r_i a s_j sú spojité, hra sa nazýva polynomická alebo separovateľná.

Ak skúmame strednú hodnotu platby, môžeme každú zmiešanú stratégiu F prvého hráča v takej hre vyjadriť m momentmi

$$r_i = \int_0^1 r_i(x)\,\mathrm{d}F(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

a zmiešanú stratégiu druhého hráča momentmi

$$s_j \int_0^1 s_j(y)\,\mathrm{d}G(y), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Teda zmiešané stratégie hráčov môžeme vyjadriť n parametrami. Zmiešaná stratégia prvého hráča bude vektor $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ a zmiešaná stratégia druhého hráča bude vektor $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Stredná hodnota platby potom bude

$$E(r, s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i s_j$$

Poznamenávame, že ak funkcia M je polynomická, môžeme ju zapísať v tvare (3.7) viacerými spôsobmi. Metódy riešenia polynomických hier, ktoré možno použiť aj na riešenie maticových hier, sú podrobnejšie opísané v [46] a [50].

Pri hľadaní číselných metód riešenia nekonečných hier dvoch hráčov sa niektorí autori snažili použiť aj metódy, ktoré sa bežne používajú pri riešení konečných hier dvoch hráčov. Túto myšlienku využil aj Danskin v [14], ktorý zovšeobecnil známu približnú Brownovu metódu na riešenie maticových hier na riešenie nekonečných hier dvoch hráčov so spojitou funkciou platieb. Táto metóda sa zakladá na princípe fiktívnych hier a pomocou nej možno získať približné optimálne stratégie hráčov a približnú hodnotu hry.

Nakoniec Ruefli v [52] navrhuje riešiť niektoré triedy nekonečných hier pomocou metód matematického programovania. Ukazuje sa, že pre také hry možno zapísať ekvivalentné úlohy matematického programovania, ktoré sa dajú riešiť známymi metódami.

Ako sme už uviedli, na riešenie nekonečných hier dvoch hráčov neexistuje nijaká univerzálna metóda. Preto aj výskum v tejto oblasti sa sústreďuje na riešenie hier s konkrétnymi funkciami platieb, ktoré vznikajú v aplikáciách týchto hier.

3.3 APLIKÁCIE NEKONEČNÝCH HIER DVOCH HRÁČOV

Najrozsiahlejšími aplikáciami nekonečných hier dvoch hráčov sú aplikácie vojenského typu. Spôsobené to je okrem iného aj tým, že tieto hry sú antagonistické a vojenské situácie možno najlepšie modelovať ako nekonečné hry dvoch hráčov.

Rozsiahlu triedu nekonečných hier dvoch hráčov predstavujú aj hry s voľbou časového momentu (načasovania). V hrách takéhoto typu ide o nájdenie vhodného okamihu pre akciu v danom časovom intervale, pričom výsledný efekt akcie závisí od toho, aký časový moment volil pre svoju akciu protivník. V literatúre je opísaných viac druhov takýchto hier, ktoré sa odlišujú v jednotlivých predpokladoch a interpretáciách. Vo väčšine týchto hier sa predpokladá, že každý z hráčov môže uskutočniť svoju akciu len raz. Okrem toho je dôležité aj poradie, v akom hráči uskutočňujú svoje akcie. Funkciu platieb takejto hry môžeme všeobecne zapísať takto:

$$M(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{ak } x < y \\ f(x) & \text{ak } x = y \\ L(x, y) & \text{ak } x > y \end{cases}$$

kde K je spojitá funkcia definovaná na množine $0 \leqq x \leqq y \leqq 1$,
L — spojitá funkcia definovaná na množine $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$,
f — spojitá funkcia na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Táto funkcia platieb nadobúda konkrétny tvar v modeloch vojenských situácií a akcií, ktoré sa dajú skúmať ako nekonečné hry dvoch hráčov — súboje. Z nich najznámejšie sú hlučný a nehlučný súboj. Tieto dva typy modelov môžu mať veľa rozličných foriem. V nich možno brať do úvahy predpoklady na zmenu niektorých parametrov, ako napr. pravdepodobnosti zásahu pre hráčov, počtu nábojov, ktoré majú hráči k dispozícii. Okrem toho sú známe aj modely, ktoré kombinujú hlučný a nehlučný súboj s rôznym stupňom informácie pre hráčov.

Pomocou hier tohto typu, teda súbojov, možno modelovať rozmanité vojenské situácie, ktoré sa vyskytujú v modernej vojne, napr. protivzdušnú obranu, vzdušné súboje lietadiel. Tieto modely sú podrobnejšie opísané v [51, 57 a 16].

Modely nekonečných hier sa aplikovali aj pri riešení zložitejších vojenských situácií. Jedna úloha je napríklad nájsť optimálne stratégie na využitie vzdušných a raketových síl, ktoré plnia rôzne úlohy v boji, ako je úder proti nepriateľským základniam, protivzdušná obrana, podpora pozemných vojsk a pod. Modely tohto typu sú podrobnejšie opísané v [51].

Okrem vojenských aplikácií sú známe z literatúry aj pokusy o ekonomické aplikácie nekonečných hier dvoch hráčov. Tieto modely sa využívajú pri skúmaní niektorých teoretických problémov trhovej rovnováhy, konkurenčných vzťahov, problémov reklamy a pod. Prehľad takých aplikácií je uvedený v [43 a 66].

Niektoré možnosti ekonomických aplikácií nekonečných hier dvoch hráčov sme naznačili v príkladoch 3.1 a 3.2.[1] Z nich vyplýva, že modely nekonečných hier sa dajú využiť aj pri riešení niektorých ekonomických problémov. Ide predovšetkým o modely, ktoré zahŕňajú voľbu riešenia v čase, modely určenia optimálnych rozmerov výrobku, ako aj modely, pomocou ktorých možno skúmať niektoré teoretické otázky rozvoja ekonomiky. Niektoré tieto aplikácie už boli publikované v literatúre (pozri napr. [8]). Avšak dôslednejšie využitie modelov nekonečných hier na riešenie špecifických ekonomických problémov vyžaduje podstatne rozšíriť výskum v tejto oblasti.

---

[1] Z poznatkov tejto kapitoly ľahko zistíme, že optimálne stratégie hráčov v hre z príkladu 3.2 sú $x_0 = y_0 = z$, kde z je riešením rovnice $P_1(x) + P_2(x) = 1$. Teda zákazníci budú postupovať optimálnym spôsobom, ak predložia návrh na kúpu výrobku v polovici veľtrhu súčasne.

4 HRY n HRÁČOV

Hry dvoch hráčov, ktoré modelujú konfliktné rozhodovacie situácie s dvoma racionálnymi účastníkmi a protikladnými záujmami (napr. maticové hry), resp. s neprotikladnými záujmami (napr. bimaticové hry), modelujú iba malú časť konfliktných situácií vznikajúcich v reálnom živote. Aparát a princípy analýzy zložitejších konfliktných rozhodovacích situácií s väčším počtom účastníkov a s komplikovanejšou štruktúrou vzťahov poskytuje všeobecná teória hier n hráčov.

V tejto kapitole sa zaoberáme modelovaním konfliktných rozhodovacích situácií s väčším počtom účastníkov pomocou tzv. hry n hráčov v normálnom tvare. Ďalej uvádzame dva základné prístupy k hrám n hráčov — tzv. *nekooperatívnu teóriu*, ktorá vychádza z predpokladu, že nie sú prípustné dohody medzi hráčmi, a kooperatívnu teóriu, ktorá pripúšťa spoluprácu hráčov a dohody o voľbe stratégií a rozdeľovaní spoločným postupom získaných platieb.

4.1 KONEČNÁ HRA n HRÁČOV V NORMÁLNOM TVARE

V prvej kapitole sme zaviedli pojem hry v normálnom tvare ako matematický model konfliktnej rozhodovacej situácie s väčším počtom racionálnych účastníkov a so skalárnym ohodnotením výsledkov.

Definícia 4.1

Hrou n hráčov v normálnom tvare nazývame model

$$[P = \{1, 2, \ldots, n\};\ X_1, X_2, \ldots, X_n;\ M_1, M_2, \ldots, M_n]$$

kde P je množina hráčov,
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ — množiny stratégií hráčov,
$M_1, M_2, \ldots, M_n$ — skalárne funkcie platieb hráčov, definované na množine výsledkov.

$$X = \prod_{p=1}^{n} X_p$$

Ak sú všetky množiny stratégií X_p konečné, tak hovoríme o konečnej hre

n hráčov v normálnom tvare. Príslušný model z definície 4.1 môžeme v tomto prípade upraviť.

Usporiadame prvky množín X_p. Nech množina X_p obsahuje m_p prvkov. Každej stratégii $x_p \in X_p$ priradíme jedno prirodzené číslo

$$j_p = 1, 2, \ldots, m_p$$

Namiesto množiny stratégií X_p potom skúmame množinu indexov

$$J_p = \{1, \ldots, j_p, \ldots, m_p\}$$

Preskúmame množinu všetkých prvkov

$$(j_1, \ldots, j_{p-1}, j_{p+1}, \ldots, j_n)$$

karteziánskeho súčinu

$$J_1 \times \ldots \times J_{p-1} \times J_{p+1} \times \ldots \times J_n$$

t. j. množinu všetkých súborov stratégií protihráčov p-tého hráča, ktorá obsahuje

$$t_p = m_1 \times \ldots \times m_{p-1} \times m_{p+1} \times \ldots \times m_p$$

prvkov. Usporiadame ich pomocou prirodzených čísel $k_p = 1, 2, \ldots, t_p$. Namiesto množiny súborov stratégií protihráčov p-tého hráča môžeme skúmať množinu indexov

$$K_p = \{1, \ldots, k_p, \ldots, t_p\}$$

Každý výsledok hry

$$(j_1, \ldots, j_{p-1}, j_p, j_{p+1}, \ldots, j_n)$$

môžeme teraz zapísať ako dvojicu

$$(j_p, k_p)$$

kde j_p je stratégia volená p-tým hráčom,
k_p — príslušný súbor stratégií, ktoré volili ostatní hráči.

Platbu p-tého hráča zodpovedajúcu tomuto výsledku môžeme zapísať ako

$$M_p(j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n) = M_p(j_p, k_p) = a_{jk}^{(p)}$$

Poznamenávame, že v záujme zjednodušenia pomerne zložitej symboliky budeme často (v prípadoch, keď je význam jednotlivých symbolov zrejmý zo súvislostí) upúšťať od úplného zápisu viacstupňových indexov. Napríklad namiesto zápisu

$$a_{j_p k_p}^{(p)}$$

platby p-tého hráča pri výsledku (j_p, k_p) jednoducho píšeme

$$a_{jk}^{(p)}$$

a automaticky predpokladáme, že $j = j_p$ a $k = k_p$.

V uvedenej symbolike môžeme všetky hodnoty funkcie platieb M_p zapísať v tvare

$$\mathbf{A}^{(p)} = (a_{jk}^{(p)})$$

kde $\mathbf{A}^{(p)}$ je matica typu $m_p \times t_p$. Riadky tejto matice zodpovedajú stratégiám p-tého hráča, stĺpce zodpovedajú usporiadaným súborom stratégií ostatných hráčov. Maticu $\mathbf{A}^{(p)}$ nazývame *maticou platieb* p-tého hráča.

Definícia 4.2

Konečnou hrou n hráčov v normálnom tvare nazývame model

$$\begin{bmatrix} P = \{1, 2, \dots, n\};\ J_1, J_2, \dots, J_n \\ K_1, K_2, \dots, K_n;\ \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

kde P je množina hráčov,
J_p — usporiadaná konečná množina stratégií p-tého hráča,
K_p — usporiadaná konečná množina súborov statégií protivníkov p-tého hráča,
$\mathbf{A}^{(p)}$ — matica platieb p-tého hráča.

Príklad 4.1

Preskúmame nasledujúcu hru: Každý z troch hráčov dostane po dve karty; prvý hráč červenú päťku a čiernu päťku, druhý hráč červenú trojku a čiernu päťku, tretí hráč červenú päťku a čiernu trojku. Hráči poznajú karty protivníkov. Na pokyn rozhodcu volí každý z hráčov (bez toho, aby sa dohováral s ostatnými hráčmi) jednu zo svojich kariet. Ak sú všetky tri zvolené karty rovnakej farby, tak hra sa skončí nerozhodne (nikto nikomu nič neplatí). Ak sú karty rôznej farby, platí hráč s odlišnou farbou hráčom s rovnakou farbou sumy rovnajúce sa hodnotám kariet, ktoré volili.

Zostavíme príslušný matematický model. Každý z hráčov má dve stratégie:

Prvý hráč	$j_1 = 1$	voliť červenú 5
	$j_1 = 2$	voliť čiernu 5
Druhý hráč	$j_2 = 1$	voliť červenú 3
	$j_2 = 2$	voliť čiernu 5
Tretí hráč	$j_3 = 1$	voliť červenú 5
	$j_3 = 2$	voliť čiernu 3

Usporiadané množiny stratégií hráčov sú:

$$J_1 = \{1, 2\}$$
$$J_2 = \{1, 2\}$$
$$J_3 = \{1, 2\}$$

Prvky množiny K_1 sú indexy všetkých dvojíc (j_2, j_3) stratégií druhého a tretieho hráča, prvky množiny K_2 sú indexy všetkých dvojíc (j_1, j_3) stratégií prvého a tretieho hráča, prvky K_3 sú indexy všetkých dvojíc (j_1, j_2) stratégií prvého a druhého hráča. Usporiadanie prvkov množín K_1, K_2 a K_3 uvádzame v *tab. 4.1.*

Tabuľka 4.1

K_1		K_2		K_3	
k_1	j_2, j_3	k_2	j_1, j_3	k_3	j_1, j_2
1	1, 1	1	1, 1	1	1, 1
2	1, 2	2	1, 2	2	1, 2
3	2, 1	3	2, 1	3	2, 1
4	2, 2	4	2, 2	4	2, 2

Na základe uvedených množín indexov môžeme zapísať matice platieb jednotlivých hráčov:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -8 \\ -8 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -8 \\ -10 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -10 \\ -8 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Z uvedených matíc platieb ľahko určíme platby hráčov, ktoré zodpovedajú ľubovoľnému výsledku hry. Napríklad výsledku

$$(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 1)$$

(t. j. prvý hráč volí červenú 5, druhý hráč volí čiernu 5 a tretí hráč volí červenú 5) zodpovedajú platby

$$a_{13}^{(1)} = 5 \quad \text{pre prvého hráča}$$
$$a_{21}^{(2)} = -10 \quad \text{pre druhého hráča}$$
$$a_{12}^{(3)} = 5 \quad \text{pre tretieho hráča}$$

(t. j. druhý hráč zaplatí prvému a tretiemu hráčovi po päť peňažných jednotiek).

Z pravidiel hry je zrejmé, že ide o konečnú hru troch hráčov s konštantným súčtom platieb.

Tabuľka 4.2

j_1, j_2, j_3	M_1	M_2	M_3
1, 1, 1	0	0	0
1, 1, 2	5	3	−8
1, 2, 1	5	−10	5
1, 2, 2	−8	5	3
2, 1, 1	−8	3	5
2, 1, 2	5	−8	3
2, 2, 1	5	5	−10
2, 2, 2	0	0	0

V *tab. 4.2* uvádzame ešte jeden variantný spôsob zápisu skúmanej hry. Táto tabuľka vlastne zadáva diskrétne funkcie platieb jednotlivých hráčov. V prvom stĺpci sa zapisujú výsledky hry (t. j. jednotlivé trojice stratégií hráčov), ďalšie stĺpce obsahujú platby hráčov zodpovedajúce týmto výsledkom.

Pre konečné hry n hráčov v normálnom tvare zovšeobecníme teraz niektoré pojmy, ktoré sme zaviedli v druhej kapitole v súvislosti s analýzou konečných hier dvoch hráčov.

Prvky $j_p \in J_p$ ďalej nazývame *čisté stratégie p-tého hráča* v hre (4.1). Podobne ako v maticovej, resp. bimaticovej hre aj v hre (4.1) má často zmysel uvažovať o voľbe čistých stratégií pomocou vhodných náhodných mechanizmov podľa vopred stanoveného pravdepodobnostného rozdelenia, t. j. o použití zmiešanej stratégie.

Definícia 4.3

Nech $J_p = \{1, 2, \ldots, m_p\}$ je množina čistých stratégií p-tého hráča v hre (4.1). *Zmiešanou stratégiou* p-tého hráča nazývame m_p-rozmerný vektor

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = (y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \ldots, y_{m_p}^{(p)})$$

taký, že

$$\sum_{j \in J_p} y_j^{(p)} = 1, \qquad y_j^{(p)} \geqq 0$$

kde $p \in P$, $j \in J_p$.

Zložka $y_j^{(p)}$ vektora $\boldsymbol{y}^{(p)}$ udáva pravdepodobnosť, s ktorou náhodný mechanizmus volí čistú stratégiu $j \in J_p$ p-tého hráča. Množinou všetkých zmiešaných stratégií p-tého hráča je jednotkový simplex

$$S_{m_p} = \left\{\boldsymbol{y}^{(p)} \in E_{m_p}, \sum_{j \in J_p} y_j^{(p)} = 1, \; y_j^{(p)} \geqq 0\right\}$$

v m_p-rozmernom euklidovskom priestore E_{m_p}.

Ak hráči používajú náhodné mechanizmy a zmiešané stratégie, sú voľby ich čistých stratégií nezávislé náhodné javy. Nech hráči používajú súbor zmiešaných stratégií

$$\boldsymbol{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)})$$

kde $y^{(p)}$ je zmiešaná stratégia p-tého hráča, $p \in P$, potom pravdepodobnosť toho, že výsledkom hry bude súbor čistých stratégií

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

sa rovná súčinu

$$y_{j_1}^{(1)} \times y_{j_2}^{(2)} \times \ldots \times y_{j_n}^{(n)}$$

a veličina

$$\sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} M_p(j_1, \ldots, j_n) y_{j_1}^{(1)} \ldots y_{j_n}^{(n)}$$

udáva strednú hodnotu platby p-tého hráča.

Definícia 4.4

Funkciu

$$E_p^{(\boldsymbol{y})} = E_p(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} M_p(j_1, \ldots, j_n) y_{j_1}^{(1)} \ldots y_{j_n}^{(n)}$$

definovanú na karteziánskom súčine

$$S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \ldots \times S_{m_n}$$

kde S_{m_p} je množina zmiešaných stratégií p-tého hráča, nazývame funkciou *strednej hodnoty platby* p-tého hráča v konečnej hre n hráčov.

Označme

$$\boldsymbol{e}_{j_p} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

m_p-rozmerný jednotkový vektor s jednotkou na j_p-tom mieste (ostatné zložky sú nulové). Zrejmé je, že ak p-tý hráč volí jednotkovú zmiešanú stratégiu

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{e}_{j_p}$$

príslušný náhodný mechanizmus volí vždy čistú stratégiu j_p. Jednotkové zmiešané stratégie sú krajnými bodmi konvexného polyédra zmiešaných stratégií S_{m_p}. Ak všetci hráči volia jednotkové zmiešané stratégie, stredné hodnoty ich platieb sa rovnajú hodnotám príslušných funkcií platieb, t. j.

$$E_p(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = M_p(j_1, \ldots, j_n)$$

V konečnej hre n hráčov v normálnom tvare (4.1), modelovanej pomocou matíc platieb jednotlivých hráčov, môžeme strednú hodnotu platby hráča vyjadriť aj takto:

Označíme

$$z_k^{(p)} = y_{j_1}^{(1)} \times \ldots \times y_{j_{p-1}}^{(p-1)} \times y_{j_{p+1}}^{(p+1)} \times \ldots \times y_{j_p}^{(p)}$$

kde súbor čistých stratégií

$$(j_1, \ldots, j_{p-1}, j_{p+1}, \ldots, j_n)$$

je k_p-tým prvkom množiny K_p. Potom vektor

$$\boldsymbol{z}^{(p)} = (z_1^{(p)}, z_2^{(p)}, \ldots, z_{t_p}^{(p)})$$

je nejakým pravdepodobnostným rozdelením na množine K_p a

$$E_p(\boldsymbol{y}) = E_p(\boldsymbol{y}^{(p)}, \boldsymbol{z}^{(p)}) = \sum_{j \in J_p} \sum_{k \in K_p} a_{jk}^{(p)} y_j^{(p)} z_k^{(p)}$$

Príklad 4.2

Nech v hre z príkladu 4.1 volia hráči zmiešané stratégie

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y}^{(3)} = (0, 1)$$

potom

$$z_1^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot 0, \qquad z_2^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot 1, \qquad z_3^{(1)} = \frac{3}{4} \cdot 0 \qquad z_4^{(1)} = \frac{3}{4} \cdot 1$$

teda

$$\boldsymbol{z}^{(1)} = \left(0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

Stredná hodnota platby prvého hráča pri daných zmiešaných stratégiách bude

$$E_1(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -8 \\ -8 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = -\frac{7}{4}$$

Poznámka 4.1

Reálna konfliktná rozhodovacia situácia spravidla nie je jednorazovým aktom výberu variantov, ale má aj svoju časovú dimenziu, prejavujúcu sa v tom, že ide o postupnosť väčšieho počtu elementárnych rozhodnutí jednotlivých účastníkov, prijímaných v určitom poradí. Výsledok môžu pritom ovplyvniť aj náhodné faktory. Ak pripustíme dynamický charakter konfliktných rozhodovacích situácií, má zmysel uvažovať aj o stupni informovanosti jednotlivých hráčov o priebehu príslušného rozhodovacieho procesu. Uvedené činitele zohľadňuje model, ktorý nazývame *hrou v rozvinutom tvare*. Keďže každú hru v rozvinutom tvare môžeme formálne upraviť na hru v normálnom tvare, obmedzíme sa ďalej iba na hry v normálnom tvare. Podrobný opis konečných hier n hráčov v rozvinutom tvare možno nájsť napr. v [33].

4.2 NEKOOPERATÍVNE HRY n HRÁČOV

V tejto stati sa zaoberáme hrami n hráčov v normálnom tvare, v ktorých nie sú prípustné záväzné dohody medzi hráčmi o voľbe stratégií. V takýchto hrách, nazývaných nekooperatívne hry, postupuje každý hráč samostatne a volí svoje stratégie tak, aby si zabezpečil čo možno najvyššiu platbu bez toho, aby svoje rozhodovanie podriaďoval postupu v rámci nejakej skupiny hráčov.

Ukážeme, akú platbu si môže každý hráč v nekooperatívnej hre zabezpečiť bez ohľadu na správanie ostatných hráčov. V tejto súvislosti zavedieme pojem *garančnej platby* a *garančnej stratégie*. Ďalej zovšeobecníme pojem rovnovážneho bodu (známy už zo state 2.2 o bimaticových hrách), ktorý je východiskom pri úvahách o optimálnom rozhodovaní hráčov v nekooperatívnej hre.

4.2.1 Základné pojmy o nekooperatívnych hrách

Budeme skúmať hry n hráčov v normálnom tvare (pozri definíciu 4.1), t. j. model

$$[P = \{1, 2, \ldots, n\};\ X_1, X_2, \ldots, X_N;\ M_1, M_2, \ldots, M_n] \tag{4.2}$$

V prípade, že hra (4.2) je konečná, budeme skúmať model (4.1) z definície 4.2.

V stati 4.1 sme zaviedli pojem zmiešanej stratégie a strednej hodnoty platieb p-tého hráča v hre (4.1). Poznamenajme, že predpoklad o používaní zmiešaných stratégií v konečnej hre n hráčov je vlastne ekvivalentný zámene pôvodnej hry (4.1) nejakou inou, nekonečnou hrou, ktorú možno vo vzťahu k pôvodnej hre prijateľným spôsobom interpretovať. Túto nekonečnú hru nazývame *zmiešané rozšírenie* príslušnej konečnej hry. Ak teda ďalej hovoríme o zmiešanom rozšírení konečnej hry n hráčov v normálnom tvare, máme na zreteli model

$$[P = \{1, 2, \ldots, n\};\ S_{m_1}, S_{m_2}, \ldots, S_{m_n};\ E_1, E_2, \ldots, E_n] \tag{4.3}$$

kde P je množina hráčov,

S_{m_p} — množina zmiešaných stratégií p-tého hráča,

E_p — funkcia strednej hodnoty platby p-tého hráča.

Hru (4.1), resp. (4.2) a (4.3) nazývame *nekooperatívnou*, ak hráči nechcú, alebo nemôžu uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií. Zatiaľ čo hry dvoch hráčov s konštantným súčtom sú nekooperatívne už svojou podstatou, pretože ich antagonistický charakter vylučuje akúkoľvek spoluprácu medzi racionálnymi hráčmi, v ostatných hrách (či už v hrách dvoch hráčov s nekonštantným súčtom, alebo v hrách n hráčov kde $n > 2$) nevyplýva ich nekooperatívny alebo kooperatívny charakter priamo z príslušných modelov. Otázka možnosti alebo zákazu spolupráce sa v nich rieši pre každý prípad osobitne v závislosti od konkrétneho charakteru modelovanej rozhodovacej situácie. V niektorých prípadoch môže zákaz dohôd vyplývať zo zákona, v iných prípadoch z neexistencie mechanizmu, ktorý by vynútil splnenie uzatvorených záväzných dohôd (nie sú k dispozícii sankcie proti hráčom, ktorí dohodu porušia, ak sa im naskytne možnosť výhodnejšieho postupu), alebo z technickej nemožnosti uzatvárať dohody (hráči sa musia rozhodovať v čase, ktorý nestačí na výmenu informácií a konzultáciu o spoločnom postupe).

Pojem optimálneho rozhodovania v nekooperatívnej hre patrí vo všeobecnom prípade medzi problematické. Minimálnou intuitívne prijateľnou požiadavkou na „rozumné" výsledky nekooperatívnej hry je vlastnosť *rovnovážnosti*, ktorú môžeme všeobecne formulovať takto: Rovnovážnym nazveme taký stav, v ktorom má určitý systém za daných podmienok tendenciu zotrvávať. Nie každý výsledok nekooperatívnej hry s touto vlastnosťou možno považovať za jej optimálne riešenie. Výsledok, ktorý nemá vlastnosť rovnovážnosti, ako optimálne riešenie v nekooperatívnej hre neobstojí, pretože je v rozpore s predpokladom o racionalite hráčov. Za vyhovujúci výsledok, na ktorom sa môžu racionálni hráči zhodnúť bez toho, aby museli vopred uzatvárať špeciálne dohody, možno totiž považovať iba taký súbor stratégií, ktorý sa sám vynucuje tým, že prípadné úsilie o jeho jednostrannú zmenu vedie automaticky k poškodeniu hráča, ktorý sa o túto zmenu pokúsi.

4.2.2 Garančné platby a stratégie

Skôr ako prejdeme k analýze hry (4.2), zaveďme si nasledujúce označenia: Nech

$$W_p = \prod_{k \neq p} X_k$$

je karteziánsky súčin množín stratégií

$$X_1, \ldots, X_{p-1}, X_{p+1}, \ldots, X_n$$

hráčov $1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$, ktorých nazývame protihráčmi p-tého hráča.

Množina W_p je množinou všetkých súborov stratégií

$$\boldsymbol{w}_p = (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

protihráčov p-tého hráča. Funkciu platieb p-tého hráča

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

môžeme potom zapísať v tvare

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

kde $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{x}_p \in X_p$ a $\boldsymbol{w}_p \in W_p$.

Dôležitou charakteristikou hry (4.2) je platba, ktorú si môže každý hráč zabezpečiť samostatným postupom bez ohľadu na postup protihráčov. Inými slovami, zaujíma nás, akú platbu si môže p-tý hráč zabezpečiť za predpokladu preňho najmenej priaznivého vývoja hry.

Najmenej priaznivá situácia by pre p-tého hráča nastala vtedy, keby všetci protihráči voľbou vhodného súboru stratégií $\boldsymbol{w}_p \in W_p$ minimalizovali jeho platbu. Voľbou vhodnej stratégie $\boldsymbol{x}_p \in X_p$ môže p-tý hráč maximalizovať svoju platbu proti takémuto najmenej priaznivému postupu protihráčov. V tejto súvislosti hovoríme o *garančných* stratégiách a platbách p-tého hráča.

Definícia 4.5

Garančnou platbou p-tého hráča v hre (4.2) nazývame veličinu

$$g_p = \max_{\boldsymbol{x}_p \in X_p} \min_{\boldsymbol{w}_p \in W_p} M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

Garančnou stratégiou p-tého hráča v hre (4.2) nazývame každú jeho stratégiu $\bar{\boldsymbol{x}}_p \in X_p$, ktorá vyhovuje rovnici

$$\min_{\boldsymbol{w}_p \in W_p} M_p(\bar{\boldsymbol{x}}_p, \boldsymbol{w}_p) = \max_{\boldsymbol{x}_p \in X_p} \min_{\boldsymbol{w}_p \in W_p} M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

Ak p-tý hráč zvolí svoju garančnú stratégiu $\bar{\boldsymbol{x}}_p$, potom vie, že pri ľubovoľných stratégiách protihráčov nebude jeho platba nižšia ako g_p.

V súlade s definíciou 4.5 nazývame garančnou platbou p-tého hráča v hre (4.1) veličinu

$$g_p = \max_{j \in J_p} \min_{k \in K_p} a_{jk}^{(p)}$$

kde $a_{jk}^{(p)}$ sú prvky matice platieb $\mathbf{A}^{(p)}$. Čistou garančnou stratégiou p-tého hráča v hre (4.1) nazývame index

$$j_p^{(0)} \in J_p$$

ktorý vyhovuje rovnici

$$\min_{k \in K_p} a^{p}_{j(0)\,p} = \max_{j \in J_p} \min_{k \in K_p} a^{(p)}_{jk}$$

Garančnú platbu, resp. garančnú čistú stratégiu v hre (4.1) určíme ako maximálne riadkové minimum matice $\mathbf{A}^{(p)}$, resp. ako index riadku matice $\mathbf{A}^{(p)}$, pre ktorý sa toto maximálne riadkové minimum realizuje.

Analogicky môžeme definovať garančnú strednú hodnotu platby p-tého hráča a jeho garančnú zmiešanú stratégiu v hre (4.1) ako garančnú platbu a garančnú stratégiu v hre (4.3). Ľahko sa presvedčíme o tom, že garančná zmiešaná stratégia v hre (4.1) nie je nič iné ako minmaxová optimálna zmiešaná stratégia maximalizujúceho hráča v maticovej hre s maticou platieb $\mathbf{A}^{(p)}$, pričom garančná stredná hodnota platby p-tého hráča sa rovná hodnote tejto hry. Vzhľadom na to môžeme garančné zmiešané stratégie a garančné stredné hodnoty platieb v hre (4.3) určovať už známymi metódami teórie maticových hier.

Príklad 4.3

Preskúmajme konečnú hru troch hráčov, v ktorej každý z hráčov má dve čisté stratégie a matice platieb (pri už známom usporiadaní množín indexov, zavedenom v príklade 4.1) jednotlivých hráčov sú

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Určíme garančné platby a čisté garančné stratégie hráčov:

$$g_1 = a^{(1)}_{24} = -2, \qquad j^{(0)}_1 = 2$$

$$g_2 = a^{(2)}_{13} = \ \ 0, \qquad j^{(0)}_2 = 1$$

$$g_3 = a^{(3)}_{13} = -1, \qquad j^{(0)}_3 = 1$$

Garančné stredné hodnoty platieb a garančné zmiešané stratégie hráčov sú:

$$g_1 = -2, \qquad \boldsymbol{y}^{(1)} = (0, 1)$$

$$g_2 = \ \ 0, \qquad \boldsymbol{y}^{(2)} = (1, 0)$$

$$g_3 = \frac{3}{5}, \qquad \boldsymbol{y}^{(3)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Poznámka 4.2

V špeciálnom prípade konečnej hry dvoch hráčov s konštantným súčtom sú garančné zmiešané stratégie, resp. garančné stredné hodnoty platieb hráčov totožné s riešením hry v zmiešaných stratégiách, t. j. v maticovej hre sú garančné zmiešané stratégie optimálnymi stratégiami hráčov a garančná stredná hodnota platby prvého hráča sa rovná hodnote hry. Vo všeobecnom prípade však nemožno garančné stratégie a garančné platby považovať za riešenie nekooperatívnej hry n hráčov. Výsledok určený garančnými stratégiami nezodpovedá totiž intuitívnym predpokladom o správaní inteligentných hráčov v nekooperatívnej hre. Hráč, ktorý používa svoju garančnú stratégiu, maximalizuje vlastnú platbu za predpokladu, že protihráči sa spoločne usilujú o to, aby jeho platba bola čo najnižšia. V skutočnosti každý z protihráčov p-tého hráča maximalizuje svoju vlastnú platbu. Pri výsledku hry (4.2) určenom garančnými stratégiami môžu byť skutočné platby hráčov vyššie ako ich garančné platby, t. j. môže platiť

$$M_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) > g_p$$

Garančná platba je teda iba pesimistickým odhadom dolnej hranice platby, ktorú si môže každý racionálny hráč v nekooperatívnej hre n hráčov zabezpečiť. Výsledok hry (4.2) určený garančnými stratégiami nemá vlastnosť rovnovážnosti (pozri stať 4.2.1). Ak predpokladáme, že racionálny hráč maximalizuje svoju platbu proti zadaným stratégiám protivníkov, potom pre p-tého hráča môže proti zadaným garančným stratégiám protihráčov existovať výhodnejšia ako garančná stratégia, t. j. môže platiť

$$\max_{x_p \in X_p} M_p(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-1}, x_p, \bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_n) > g_p$$

Vo všeobecnom prípade majú teda hráči, ktorí maximalizujú svoje platby, dôvody na to, aby sa usilovali o zmenu stavu určeného garančnými stratégiami.

Príklad 4.4

V hre z príkladu 4.3 určujú garančné čisté stratégie hráčov výsledok $(j_1, j_2, j_3) = (2, 1, 1)$, ktorému zodpovedajú platby

$$a^{(1)}_{21} = -1 = g_1$$

$$a^{(2)}_{13} = \ \ 0 = g_2$$

$$a^{(3)}_{13} = -1 = g_3$$

teda pri voľbe garančných čistých stratégií je skutočná platba prvého hráča vyššia ako jeho garančná platba. Okrem toho je zrejmé, že výsledok hry, určený garančnými čistými stratégiami, nemá v tomto prípade vlastnosť rovnovážnosti. Napríklad pre tretieho hráča je proti garančným stratégiám prvého a druhého hráča

$$j^{(0)}_1 = 2, \qquad j^{(0)}_2 = 1$$

výhodnejšie voliť čistú stratégiu $j_3 = 2$, pretože v tomto prípade získa platbu

$$a^{(3)}_{23} = 3$$

4.2.3 Rovnovážne body a rovnovážne stratégie

S pojmom rovnovážneho bodu sme sa stretli už v druhej kapitole v súvislosti s analýzou bimaticových hier. J. F. NASH zovšeobecnil tento pojem pre prípad hry n hráčov.

Definícia 4.6

Rovnovážnym bodom hry (4.2) nazývame taký výsledok

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in X$$

že pre všetky $p \in P$ a $\boldsymbol{x}_p \in X_p$ platí

$$M_p(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{p-1}, \hat{x}_p, \hat{x}_{p+1}, \ldots, \hat{x}_n) \geqq M_p(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{p-1}, x_p, \hat{x}_{p+1}, \ldots, \hat{x}_n) \quad (4.4)$$

Zložku $\hat{\boldsymbol{x}}_p$ z rovnovážneho bodu x nazývame rovnovážna stratégia a veličinu $M_p(\hat{\boldsymbol{x}})$ nazývame rovnovážna platba p-tého hráča.

Poznámka 4.3

Vzťah (4.4) je ekvivalentný vzťahu

$$M_p(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{p-1}, \hat{x}_p, \hat{x}_{p+1}, \ldots, \hat{x}_n) = \max_{x_p \in X_p} M_p(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{p-1}, x_p, \hat{x}_{p+1}, \ldots, \hat{x}_n) \quad (4.5)$$

S využitím symboliky zavedenej v stati 4.2.2 môžeme vzťahy (4.4) a (4.5) zapísať aj takto:

$$M_p(\hat{\boldsymbol{x}}_p, \hat{\boldsymbol{w}}_p) \geqq M_p(\boldsymbol{x}_p, \hat{\boldsymbol{w}}_p)$$

pre všetky $p \in P$ a $x_p \in X_p$, resp.

$$M_p(\hat{\boldsymbol{x}}_p, \hat{\boldsymbol{w}}_p) = \max_{\boldsymbol{x}_p \in X_p} M_p(\boldsymbol{x}_p, \hat{\boldsymbol{w}}_p)$$

pre všetky $p \in P$, kde

$$\hat{\boldsymbol{w}}_p = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{p-1}, \hat{x}_{p+1}, \ldots, \hat{x}_n)$$

Uvedieme teraz intuitívnu interpretáciu pojmu rovnovážneho bodu nekooperatívnej hry a rovnovážnej stratégie hráča.

Rovnovážny bod je také pravidlo správania hráčov, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

a) ak ostatní hráči zvolili svoje rovnovážne stratégie z rovnovážneho bodu $\boldsymbol{x}$, tak p-tý hráč nemôže urobiť nič lepšie, ako zvoliť svoju rovnovážnu stratégiu $\boldsymbol{x}_p$ z toho istého rovnovážneho bodu;

b) ak sa takéto pravidlo správania stabilizuje v dlhej postupnosti opakovaní hry, nemá ani jeden z hráčov dôvod svojvoľne ho meniť, pretože jednostrannou zmenou nemôže nič získať;

c) keďže v nekooperatívnej hre nie sú prípustné záväzné dohody o voľbe stratégií, môže prípadné vyjednávanie medzi hráčmi vyústiť iba do dohody o voľbe rovnovážneho bodu, pretože len v tomto prípade možno očakávať, že dohodu ani jeden z hráčov neporuší.

Rovnovážny bod nekooperatívnej hry má teda vlastnosť rovnovážnosti, o ktorej sme hovorili v stati 4.2.1.

Preskúmajme teraz konečnú hru (4.1). Ako špeciálny prípad definície 4.6 dostaneme túto definíciu rovnovážneho bodu konečnej hry n hráčov v čistých stratégiách.

Definícia 4.7

Rovnovážny bod konečnej hry (4.1) v čistých stratégiách nazývame takú n-ticu čistých stratégií

$$(j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, \ldots, j_n^{(0)})$$

že pre všetky $p \in P$ a $j_p \in J_p$ platí

$$a^{(p)}_{j_p^{(0)} k_p^{(0)}} \geqq a^{(p)}_{j_p k_p^{(0)}} \quad (4.6)$$

kde $k_p^{(0)} \in K_p$ je index súboru čistých stratégií

$$(j_1^{(0)}, \ldots, j_{p-1}^{(0)}, j_{p+1}^{(0)}, \ldots, j_n^{(0)})$$

protihráčov p-tého hráča.

Poznámka 4.4

Vzťah (4.6) z definície 4.7 môžeme zapísať aj takto:

$$a^{(p)}_{j_p^{(0)} k_p^{(0)}} = \max_{j_p \in J_p} a^{(p)}_{j_p k_p^{(0)}} \quad (4.7)$$

pre všetky $p \in P$. Zo vzťahu (4.7) je zrejmé, že súbor čistých stratégií $(j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, \ldots, j_n^{(0)})$ je rovnovážnym bodom hry (4.1) v čistých stratégiách práve vtedy, ak pre všetky $p \in P$ sú veličiny

$$a^{(p)}_{j_p^{(0)} k_p^{(0)}}$$

maximálnymi prvkami svojich stĺpcov v príslušných maticiach $\mathbf{A}^{(p)}$.

Ak definíciu 4.6 aplikujeme na zmiešané rozšírenie (4.3) konečnej hry (4.1), môžeme definovať rovnovážny bod konečnej hry n hráčov v zmiešaných stratégiách, resp. rovnovážne stredné hodnoty platieb hráčov a rovnovážne zmiešané stratégie v hre (4.1).

Definícia 4.8

Rovnovážny bod konečnej hry (4.1) v zmiešaných stratégiách nazývame každý rovnovážny bod zmiešaného rozšírenia (4.3) tejto hry. Nech

$$\hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \ldots, \hat{y}^{(n)})$$

je rovnovážny bod hry (4.3), potom vektor $\boldsymbol{y}^{(p)}$ nazývame rovnovážna zmiešaná stratégia p-tého hráča v hre (4.1) a veličinu $E_p(\hat{\boldsymbol{y}})$ nazývame rovnovážna stredná hodnota platieb p-tého hráča v hre (4.1).

4.2.4 Optimálne stratégie

Pre potreby analýzy konečných hier n hráčov sformulujeme algoritmus určenia všetkých rovnovážnych bodov hry (4.1) v čistých stratégiách. Označme R množinu všetkých rovnovážnych bodov tejto hry v čistých stratégiách. Vychádzajúc z definície 4.7, resp. z poznámky 4.4, môžeme množinu R hry (4.1) určiť takto:

1. Pre každé $p \in P$ určíme všetky stĺpcové maximá matice $\mathbf{A}^{(p)}$, teda

$$\max_{j \in J_p} a_{jk}^{(p)} \tag{4.8}$$

Množinu n-tíc čistých stratégií $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, ktoré zodpovedajú jednotlivým stĺpcovým maximám (4.8) matice $\mathbf{A}_p$ označíme symbolom R_p.

2. Rovnovážnymi bodmi hry (4.1) v čistých stratégiách sú všetky n-tice čistých stratégií $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, ktoré patria do všetkých množín R_p. Množinu R všetkých rovnovážnych bodov v čistých stratégiách dostaneme teda ako prienik

$$R = \bigcap_{p=1}^{n} R_p$$

Skôr ako prejdeme k ďalšiemu rozboru nekooperatívnej hry, ilustrujme na jednoduchých príkladoch problémy súvisiace s interpretáciou rovnovážneho bodu ako pravidla optimálneho rozhodovania hráčov.

Príklad 4.5

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v konečnej hre troch hráčov, v ktorej má každý z hráčov dve čisté stratégie a matice platieb sú zadané takto:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2^* & 3^* & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2^* & 3^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4^* & -1 & 2^* \\ 4^* & 3 & 0^* & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2^* & -1 & -1 \\ 3^* & 0 & 1^* & 2^* \end{pmatrix}$$

Maximálne prvky jednotlivých stĺpcov matíc $\mathbf{A}^{(p)}$ sme označili hviezdičkami.

$$R_1 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (2, 2, 1); (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2, 1); (1, 1, 2); (2, 2, 1); (2, 1, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 2); (2, 2, 2)\}$$

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(1, 1, 2)\}$$

Vidíme, že hra z príkladu 4.5 má jediný rovnovážny bod v čistých stratégiách

$$r^{(0)} = (j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, j_3^{(0)}) = (1, 1, 2)$$

ktorému zodpovedajú rovnovážne platby hráčov

$$a_{12}^{(1)} = 3, \qquad a_{12}^{(2)} = 4, \qquad a_{21}^{(3)} = 3$$

Samostatne sa rozhodujúci hráč, ktorý volí inú čistú stratégiu ako rovnovážnu stratégiu z $r^{(0)}$, riskuje, že jeho platba bude nižšia ako rovnovážna platba. Rovnovážny bod možno v tomto prípade považovať za pravidlo optimálneho rozhodovania hráčov v príslušnej nekooperatívnej hre.

Príklad 4.6

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v čistých stratégiách v konečnej hre troch hráčov, v ktorej má každý z hráčov dve čisté stratégie a matice platieb sú zadané takto:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2^* & 1 & 3^* & 1 \\ -1 & 2^* & 2 & 2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 3^* & 2^* & -1 \\ 2^* & -1 & 1 & 1^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & 4^* & 5^* & -1 \\ 4^* & 2 & -1 & 1^* \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \{(1, 1, 1); (2, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2, 1); (1, 1, 2); (2, 1, 1); (2, 2, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1); (2, 2, 2)\}$$

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(1, 2, 1); (2, 2, 2)\}$$

Hra z príkladu 4.6 má dva rovnovážne body v čistých stratégiách:

a) rovnovážny bod

$$r^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, j_3^{(1)}) = (1, 2, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{13}^{(1)} = 2, \qquad a_{21}^{(2)} = 2, \qquad a_{12}^{(3)} = 4$$

b) rovnovážny bod

$$r^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, j_3^{(2)}) = (2, 2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{24}^{(1)} = 2, \qquad a_{24}^{(2)} = 1, \qquad a_{24}^{(3)} = 1$$

Rovnovážny bod $r^{(1)}$ je z hľadiska všetkých hráčov výhodnejší ako rovnovážny bod $r^{(2)}$, pretože zabezpečuje hráčom väčšie rovnovážne platby. Možno ho preto považovať za riešenie skúmanej hry. Samostatne sa rozhodujúci hráč, ktorý pozná množinu R, bude vždy dávať prednosť rovnovážnej stratégii z $r^{(1)}$ pred rovnovážnou stratégiou z $r^{(2)}$. V prípade voľby inej ako rovnovážnej stratégie z $r^{(1)}$ riskuje, že jeho platba sa zmenší.

Príklad 4.7

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v konečnej hre troch hráčov, v ktorej má každý z hráčov dve čisté stratégie a matice platieb sú zadané takto:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2^* & 1^* & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3^* & 2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2^* & 1 & 4^* & 1 \\ -1 & 2^* & -2 & 2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2^* & 3^* & 1^* & -3 \\ -2 & 2 & -5 & 2^* \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \{(1, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1, 1);\ (1, 2, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 1);\ (1, 2, 1);\ (2, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R\ = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(1, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

Hra z príkladu 4.7 má dva rovnovážne body v čistých stratégiách:
a) rovnovážny bod

$$r^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, j_3^{(1)}) = (1, 1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{11}^{(1)} = 2, \qquad a_{11}^{(2)} = 2, \qquad a_{11}^{(3)} = 2$$

b) rovnovážny bod

$$r^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, j_3^{(2)}) = (2, 2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{24}^{(1)} = 2, \qquad a_{24}^{(2)} = 2, \qquad a_{24}^{(3)} = 2$$

Všimnime si, že obidva rovnovážne body sú z hľadiska všetkých hráčov rovnako výhodné (rovnovážne platby v $r^{(1)}$ a $r^{(2)}$ sú rovnaké). Predpokladajme, že hráči, ktorí postupujú nezávisle jeden od druhého, volia rovnovážne stratégie

z týchto dvoch bodov. Vzhľadom na to, že nekonzultujú voľbu stratégií, môžu v tomto prípade rôzni hráči voliť rovnovážne stratégie z rôznych rovnovážnych bodov. Nech napríklad prvý hráč volí rovnovážnu stratégiu $j_1^{(1)} = 1$ z $r^{(1)}$, druhý hráč volí rovnovážnu stratégiu $j_2^{(2)} = 2$ z $r^{(2)}$ a tretí hráč volí rovnovážnu stratégiu $j_3^{(1)} = 1$ z $r^{(1)}$. Potom výsledkom hry bude trojica čistých stratégií

$$(j_1^{(1)}, j_2^{(2)}, j_3^{(1)}) = (1, 2, 1)$$

ktorej zodpovedajú platby hráčov

$$a_{13}^{(1)} = -2, \qquad a_{21}^{(2)} = -1, \qquad a_{12}^{(3)} = 3$$

Výsledok určený uvedenými voľbami čistých stratégií nie je rovnovážnym bodom, pričom platby, ktoré hráči získajú na základe tohto výsledku, nemajú nič spoločné s rovnovážnymi platbami. V skúmanom prípade poznanie množiny R neposkytuje nezávisle sa rozhodujúcim hráčom pravidlo optimálneho rozhodovania v nekooperatívnej hre. (Treba podotknúť, že poznanie množiny R dáva v skúmanom prípade hráčom návod na optimálne konanie iba za predpokladu, že môžu konzultovať voľbu stratégií, pričom dohoda, ktorú uzatvoria, nemá záväzný charakter. V takejto situácii sa môžu bez problémov zhodnúť na voľbe rovnovážnych stratégií jedného z dvoch rovnocenných rovnovážnych bodov.)

Príklad 4.8

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v čistých stratégiách v konečnej hre troch hráčov, v ktorej má každý z hráčov dve čisté stratégie a matice platieb sú zadané takto:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1^* & 2^* & -5 \\ 5^* & -8 & 1 & -3^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 4^* & -3^* & -5^* \\ 3^* & -3 & -5 & -5^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1^* & 3 \\ -2^* & 4^* & -5 & 6^* \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \{(2, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (1, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 1, 2);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 2);\ (1, 2, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R\ = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(1, 1, 2);\ (2, 2, 2);\ (2, 1, 1)\}$$

V hre z príkladu 4.8 existujú tri rovnovážne body v čistých stratégiách:

a) rovnovážny bod

$$r^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, j_3^{(1)}) = (1, 1, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{12}^{(1)} = -1, \qquad a_{12}^{(2)} = 4, \qquad a_{21}^{(3)} = -2$$

b) rovnovážny bod

$$r^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, j_3^{(2)}) = (2, 1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{21}^{(1)} = 5, \qquad a_{13}^{(2)} = -3, \qquad a_{13}^{(3)} = 1$$

c) rovnovážny bod

$$r^{(3)} = (j_1^{(3)}, j_2^{(3)}, j_3^{(3)}) = (2, 2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{24}^{(1)} = -3, \qquad a_{24}^{(2)} = -5, \qquad a_{24}^{(3)} = 6$$

Hráči, ktorí poznajú tieto rovnovážne body a majú sa rozhodnúť o voľbe čistej stratégie, sú znova v komplikovanej situácii. Z hľadiska prvého hráča je najvýhodnejší rovnovážny bod $r^{(2)}$, z ktorého mu vyplýva rovnovážna platba 5. Z hľadiska druhého hráča je najvýhodnejší rovnovážny bod $r^{(1)}$, z ktorého mu vyplýva rovnovážna platba 4. Z hľadiska tretieho hráča je najvýhodnejší rovnovážny bod $r^{(3)}$, z ktorého mu vyplýva rovnovážna platba 6. Ak však hráči zvolia svoje rovnovážne stratégie z týchto rovnovážnych bodov, t. j. prvý hráč $j_1^{(2)} = 2$, druhý hráč $j_2^{(1)} = 1$ a tretí hráč $j_3^{(3)} = 2$, potom výsledkom hry bude súbor čistých stratégií

$$(j_1^{(2)}, j_2^{(1)}, j_3^{(3)}) = (2, 1, 2)$$

ktorému zodpovedajú platby hráčov

$$a_{22}^{(1)} = -8, \qquad a_{14}^{(2)} = -5, \qquad a_{23}^{(3)} = -5$$

t. j. najnižšie platby, ktoré v tejto hre vôbec prichádzajú do úvahy. Súbor čistých stratégií, ktorý sa realizuje v dôsledku takejto voľby hráčov, nie je pritom rovnovážnym bodom.

Vidíme, že ani v tomto prípade neposkytuje hráčom poznanie množiny rovnovážnych bodov vhodný návod na optimálne rozhodovanie v nekooperatívnej hre. (Na rozdiel od hry z príkladu 4.7 nemôže byť v tomto prípade množina rovnovážnych bodov ani vhodným podkladom na prípadné nezáväzné vyjednávanie hráčov o voľbe stratégií, pretože neexistuje taký rovnovážny bod, na ktorom by sa zhodli všetci traja hráči.)

Príklad 4.9

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v čistých stratégiách v konečnej hre troch hráčov z príkladu 4.3 s maticami platieb

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2^* & 3 & 2^* & -5 \\ -1 & 4^* & 0 & -2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2^* & 0^* & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4^* & 2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2^* & -1 & 4^* \\ 2^* & -\frac{3}{2} & 3^* & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \{(1, 1, 1);\ (2, 1, 2);\ (1, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 2);\ (1, 2, 1);\ (2, 1, 2);\ (2, 2, 1)\}$$

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$$

Hra z príkladu 4.9 nemá ani jeden rovnovážny bod v čistých stratégiách, množina R je v tomto prípade prázdna.

Z doterajšej diskusie, opierajúcej sa o príklady 4.5 až 4.9, možno predbežne urobiť tieto závery:

a) Vo všeobecnom prípade nie je zaručená existencia rovnovážnych bodov v nekooperatívnej hre (pozri príklad 4.9).

b) Ani v prípadoch, keď množina rovnovážnych bodov nie je prázdna, rovnovážny bod sám osebe ešte nedefinuje optimálne rozhodovanie v nekooperatívnej hre. Za predpokladu, že hra má jediný rovnovážny bod, možno tento bod považovať za jej optimálne riešenie (pozri príklad 4.5). Ak existuje viac rovnovážnych bodov, musíme klásť ďalšie požiadavky na vlastnosti rovnovážnych bodov, ktoré možno považovať za optimálne riešenia nekooperatívnej hry. V niektorých prípadoch dospejeme k „rozumnej“ definícii optimálnych stratégií (pozri príklad 4.6), v iných prípadoch je definícia optimálneho rozhodovania, vychádzajúca z pojmu rovnovážneho bodu, problematická (pozri príklady 4.7 a 4.8).

Na základe predchádzajúcej analýzy uvedieme teraz formálnu definíciu optimálnych stratégií hráčov v nekooperatívnej hre (4.2). S týmto cieľom zavedieme najprv niektoré nové pojmy a označenia.

Definícia 4.9

Dva rovnovážne body $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} \in R$ nazveme ekvivalentné, ak pre všetky $p \in P$ platí:

$$M_p(\boldsymbol{x}^{(1)}) = M_p(\boldsymbol{x}^{(2)})$$

Definícia 4.10

Hovoríme, že rovnovážny bod $\boldsymbol{x}^{(1)} \in R$ dominuje rovnovážny bod $\boldsymbol{x}^{(2)} \in R$, ak $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ nie sú ekvivalentné a ak pre všetky $p \in P$ platí:

$$M_p(\boldsymbol{x}^{(1)}) \geqq M_p(\boldsymbol{x}^{(2)})$$

Ak $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ sú dva rôzne rovnovážne body z množiny R, pričom $\boldsymbol{x}^{(1)}$ dominuje $\boldsymbol{x}^{(2)}$, potom možno predpokladať, že hráči preferujú rovnovážne stratégie z $\boldsymbol{x}^{(1)}$ pred rovnovážnymi stratégiami z $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Ak $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ sú ekvivalentné, potom je pre hráčov ľahostajné, ktorého z nich volia svoje rovnovážne stratégie.

Definícia 4.11

Nech $Q \in R$. Hovoríme, že rovnovážne body

$$\boldsymbol{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \in Q$$

kde $i \in I$, sú zameniteľné vzhľadom na Q, ak pre každý bod

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

taký, že

$$x_p = x_p^{(i)}, \qquad i \in I, \qquad p \in P$$

platí

$$\boldsymbol{x} \in Q$$

Všimnime si, že v definícii 4.11 o množine I nepredpokladáme, že je konečná. Bod x z tejto definície je „zmesou“ príslušných zložiek ľubovoľných vybraných bodov $\boldsymbol{x}^{(i)}$.

Definícia 4.12

Nech R_0 je taká podmnožina množiny všetkých rovnovážnych bodov R, že platí:

a) každý bod z množiny $R - R_0$ je dominovaný nejakým bodom z R_0,
b) ani jeden bod z množiny R_0 nie je dominovaný iným bodom z množiny R,
c) všetky body z množiny R_0 sú ekvivalentné,
d) všetky body z množiny R_0 sú zameniteľné vzhľadom na množinu R_0.

Množinu R_0 potom nazývame optimálnou množinou nekooperatívnej hry (4.2) a jej prvky nazývame optimálnymi bodmi tejto hry.

Definícia 4.13

Nech optimálna množina R_0 nie je prázdna, potom stratégiu $x_p^{(0)}$ z ľubovoľného optimálneho bodu $x^{(0)} \in R_0$ nazývame optimálna stratégia p-tého hráča a veličinu

$$v_p = M_p(x^{(0)})$$

nazývame optimálna platba p-tého hráča v nekooperatívnej hre (4.2).

Interpretujme uvedené pojmy. Predpokladajme, že množina R_0 optimálnych bodov nekooperatívnej hry (4.2) nie je prázdna. Ak hráči, ktorí sa rozhodujú nezávisle jeden od druhého poznajú množinu R_0, tak pri voľbe svojej stratégie z ľubovoľného optimálneho bodu vedia, že výsledkom hry bude vždy optimálny bod a ich platba sa bude rovnať optimálnej platbe. Ak zvolia stratégiu, ktorá nie je zložkou optimálneho bodu, riskujú, že sa ich platba zníži, pričom výsledok hry nemusí byť ani rovnovážnym bodom. Optimálne platby hráčov v hre (4.2) sú určené jednoznačne.

Príklad 4.10

Preskúmajme konečnú hru troch hráčov, v ktorej má každý z hráčov dve čisté stratégie a matice platieb sú zadané takto:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2^* & 1^* & -4 & 1 \\ 2^* & -1 & 0^* & 2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3^* & 0^* & 3^* & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2^* & 1 & 2^* & -2 \\ 2^* & 3^* & -2 & 1^* \end{pmatrix}$$

Určíme množinu R všetkých rovnovážnych bodov v čistých stratégiách:

$$R_1 = \{(1, 1, 1);\ (2, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (1, 2, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 2, 2)\}$$

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(1, 1, 1);\ (2, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 2)\}$$

Vidíme, že hra má 4 rovnovážne body v čistých stratégiách:

a) rovnovážny bod

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, j_3^{(1)}) = (1, 1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{11}^{(1)} = 2, \qquad a_{11}^{(2)} = 3, \qquad a_{11}^{(3)} = 2$$

b) rovnovážny bod

$$r^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, j_3^{(2)}) = (2, 1, 1)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{21}^{(1)} = 2, \qquad a_{13}^{(2)} = 3, \qquad a_{13}^{(3)} = 2$$

c) rovnovážny bod

$$r^{(3)} = (j_1^{(3)}, j_2^{(3)}, j_3^{(3)}) = (1, 1, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{12}^{(1)} = 1, \qquad a_{12}^{(2)} = 0, \qquad a_{21}^{(3)} = 2$$

d) rovnovážny bod

$$r^{(4)} = (j_1^{(4)}, j_2^{(4)}, j_3^{(4)}) = (2, 2, 2)$$

s rovnovážnymi platbami hráčov

$$a_{24}^{(1)} = 2, \qquad a_{24}^{(2)} = 1, \qquad a_{24}^{(3)} = 1$$

Ľahko sa presvedčíme o tom, že body $r^{(3)}$ a $r^{(4)}$ sú dominované ostatnými rovnovážnymi bodmi. Body $r^{(1)}$ a $r^{(2)}$ sú ekvivalentné a zameniteľné vzhľadom na množinu $\{r^{(1)}, r^{(2)}\}$. Skúmaná hra má teda neprázdnu optimálnu množinu

$$R_0 = \{r^{(1)}, r^{(2)}\} = \{(1, 1, 1); (2, 1, 1)\}$$

Prvý hráč má dve optimálne stratégie $j_1^{(0)} = 1$, resp. $j_1^{(0)} = 2$; jeho optimálnou platbou je veličina $v_1 = 2$. Optimálnou stratégiou druhého hráča je $j_2^{(0)} = 1$, jeho optimálnou platbou je veličina $v_2 = 3$. Optimálnou stratégiou tretieho hráča je $j_3^{(0)} = 1$, jeho optimálnou platbou je veličina $v_3 = 2$.

4.2.5 Existencia rovnovážnych bodov

Ukážeme, za akých podmienok je zaručená existencia rovnovážnych bodov hry (4.2).

Veta 4.1

Nech hra (4.2) má tieto vlastnosti:

a) Pre všetky $p \in P$ sú množiny X_p kompaktnými konvexnými podmnožinami príslušných euklidovských priestorov E_{m_p}.

b) Pre všetky $p \in P$ a $\boldsymbol{w}_p \in W_p$ sú funkcie

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

konkávne podľa $\boldsymbol{x}_p \in X_p$.

c) Funkcia

$$M(\boldsymbol{x}) = \sum_{p=1}^{n} M_p(\boldsymbol{x})$$

je spojitá na množine $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

d) Pre všetky $p \in P$ a $x_p \in X_p$ sú funkcie

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

spojité podľa $\boldsymbol{w}_p \in W_p$.

Potom hra (4.2) má aspoň jeden rovnovážny bod.

Poznámka 4.5

1. Dôkaz vety 4.1 možno nájsť napr. v práci Nikaidu a Isodu [48].
2. Každá ohraničená a uzatvorená množina v E_n je kompaktná.
3. Ak hra (4.2) je hrou s konštantným súčtom platieb, tak podmienka c) vety 4.1 je dôsledkom podmienok b) a d).
4. Ak v hre (4.2) sú všetky funkcie platieb $M_p(\boldsymbol{x})$ spojité na množine X, tak podmienky c) a d) vety 4.1 sú automaticky splnené.

Priamym dôsledkom vety 4.1 je nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.2

Každá konečná hra (4.1) má aspoň jeden rovnovážny bod v zmiešaných stratégiách.

Vetu 4.2 dokážeme tak, že vetu 4.1 aplikujeme na zmiešané rozšírenie (4.3) konečnej hry (4.1).

Z hľadiska interpretácie rovnovážneho bodu ako riešenia nekooperatívnej hry je zaujímavé vedieť, kedy má hra (4.2) jediný rovnovážny bod. Všeobecnú postačujúcu podmienku jednoznačnosti rovnovážneho bodu v hre (4.2) môžeme formulovať takto:

Veta 4.3

Nech sú splnené predpoklady vety 4.1 a okrem toho platí, že pre každé $p \in P$ a $\boldsymbol{w}_p \in W_p$ je funkcia

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{w}_p)$$

rýdzo konkávna podľa $\boldsymbol{x}_p \in X_p$. Potom hra (4.2) má práve jeden rovnovážny bod.

Poznámka 4.6

Na výpočet rovnovážnych bodov v niektorých triedach hier n hráčov možno použiť metódy nelineárneho programovania. Vzťahom medzi teóriou hier a nelineárnym programovaním sa zaoberá napr. [33]. Vo všeobecnosti však neexistujú dostatočne efektívne algoritmy na určenie všetkých rovnovážnych bodov.

4.3 KOOPERATÍVNE HRY *n* HRÁČOV

V tejto stati budeme predpokladať, že v hre n hráčov môžu hráči spolupracovať a uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií a prípadnom znovurozdeľovaní spoločne nadobudnutých výhier. Zavedieme pojem *koalície, koaličnej štruktúry* a *kooperatívnej hry n hráčov* v tvare charakteristickej funkcie. Ukážeme, aké pojmy optimálneho rozhodovania ponúka súčasná teória kooperatívnych hier.

4.3.1 Základné pojmy o kooperatívnych hrách

Vo viacerých príkladoch uvedených v predchádzajúcej stati sme si mohli všimnúť, že v porovnaní so samostatným postupom by spolupráca zabezpečila hráčom výhodnejšie výsledky. S kooperatívnym prístupom ku konfliktným situáciám sme sa stretli už pri analýze bimaticovej hry. V ďalších úvahách pripustíme, že hráči môžu spolupracovať pri voľbe stratégií. Táto spolupráca sa prejavuje predovšetkým vznikom koalícií.

Definícia 4.14

Nech $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina hráčov v hre (4.2). Potom *koalíciou* v hre (4.2) nazveme každú podmnožinu $S \subseteq P$.

V terminológii hier je *koalíciou skupina hráčov, ktorí spolupracujú pri voľbe stratégií na základe vopred uzatvorenej záväznej dohody.* Z formálnych dôvodov však pripúšťame v ďalšom výklade aj „prázdnu koalíciu", t. j. koalíciu, ktorej členom nie je ani jeden hráč, ako aj jednočlenné koalície.

Ak členovia koalície, ktorí v dôsledku spoločného postupu získavajú, vyplácajú členom, ktorí v dôsledku spoločného postupu, resp. v porovnaní s prípadnou účasťou v inej koalícii strácajú, nejaké kompenzácie, hovoríme o koalícii s *prenosnými platbami.* V opačnom prípade (keď sa platby medzi hráčmi neprerozdeľujú), hovoríme o koalícii s *neprenosnými platbami.*

Definícia 4.15

Koaličnou štruktúrou hry (4.2) nazývame taký súbor neprázdnych podmnožín

$$B = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$$

množiny P, pre ktorý platí

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = P \tag{4.9}$$

Ak pre koaličnú štruktúru B platí

$$B_i \cap B_j = \emptyset \tag{4.10}$$

pre všetky i, j také, že $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, potom ju nazývame *disjunktnou* koaličnou štruktúrou. V opačnom prípade hovoríme o nedisjunktnej koaličnej štruktúre.

Poznámka 4.7

1. Množiny B_i, B_j ktoré spĺňajú podmienku (4.10) nazývame disjunktnými množinami. Rozloženie nejakej množiny na súbor podmnožín, ktoré spĺňajú podmienky (4.9) až (4.10), nazývame rozkladom tejto množiny na disjunktné triedy.

2. Nech B je nejaká koaličná štruktúra, potom vzťah (4.9) hovorí, že každý hráč je členom aspoň jednej koalície. Ak koaličná štruktúra B je disjunktná, potom každý hráč je členom práve jednej koalície. V nedisjunktnej koaličnej štruktúre môže byť jeden hráč súčasne členom viacerých koalícií.

Koalíciu označujeme tak, že jej členov zapíšeme do zložených zátvoriek. Koaličnú štruktúru označujeme tak, že jednotlivé koalície zapíšeme do okrúhlych zátvoriek. V hre piatich hráčov teda $\{1, 3, 4\}$ označuje koalíciu prvého, tretieho a štvrtého hráča a

$$(\{1, 3, 4\}, \{2, 5\})$$

označuje disjunktnú koaličnú štruktúru, ktorá sa skladá z dvoch koalícií: prvý, tretí a štvrtý hráč spolupracujú v jednej koalícii a druhý a piaty hráč v druhej koalícii.

Poznámka 4.8

Ľahko si overíme, že n hráčov môže utvoriť $2^2 - 1$ rôznych neprázdnych koalícií. Ďalej možno ukázať, že n hráčov môže utvoriť

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

rôznych disjunktných koaličných štruktúr. Ak pripustíme aj nedisjunktné koaličné štruktúry, potom počet všetkých koaličných štruktúr, ktoré môžu vzniknúť v hre n hráčov, je $2^k - 1$, kde $k = 2^2 - 1$.

V reálnej konfliktnej situácii môžu existovať určité ohraničenia na spoluprácu účastníkov; niektoré formálne možné koalície, resp. koaličné štruktúry môžu byť a priori nerealizovateľné, alebo zakázané. Pre príslušný model má preto zmysel zaviesť pojem množiny prípustných koaličných štruktúr, ktorá uvádza zoznam všetkých koaličných štruktúr, povolených „pravidlami hry".

Na základe doterajších úvah zovšeobecníme model hry n hráčov v normálnom tvare takto:

Definícia 4.16

Zovšeobecnenou hrou n hráčov v normálnom tvare nazveme model

$$\begin{bmatrix} P = \{1, 2, \ldots, n\}; X_1, X_2, \ldots, X_n; \\ M_1, M_2, \ldots, M_n; K = \{K_1, K_2, \ldots, K_t\} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

kde P je množina hráčov,
X_p — množina stratégií p-tého hráča,

M_p — funkcia platieb p-tého hráča,
K — množina prípustných koaličných štruktúr $K_1, K_2, \ldots, K_t$.

Hru (4.11), v ktorej sa množina K prípustných koaličných štruktúr skladá z jediného prvku, nazývame hra s *fixovanou koaličnou štruktúrou*. V opačnom prípade (hráči môžu tvoriť väčší počet koaličných štruktúr) hovoríme o hre s *premenlivou koaličnou štruktúrou*.

Kooperatívnymi hrami nazývame hry (4.11) s premenlivou koaličnou štruktúrou, resp. hry s fixovanou koaličnou štruktúrou, v ktorej sa vyskytujú viacčlenné koalície.

Kooperatívnou hrou s *voľnou tvorbou koaličných štruktúr* nazývame hru (4.11), v ktorej množina K obsahuje všetky (disjunktné a nedisjunktné) koaličné štruktúry. Ak množina prípustných koaličných štruktúr obsahuje iba všetky disjunktné koaličné štruktúry, hovoríme o hre s *voľnou tvorbou disjunktných koaličných štruktúr*.

Kooperatívnu hru, v ktorej všetky koalície majú vlastnosť prenosnosti platieb, nazývame *hrou s prenosnými platbami*, v opačnom prípade hovoríme o *hre s neprenosnými platbami*.

Poznámka 4.9

Z hľadiska uvedenej klasifikácie nazývame nekooperatívnou hrou hru (4.11) s fixovanou koaličnou štruktúrou $(\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$, t. j. jediná prípustná koaličná štruktúra sa skladá z jednočlenných koalícií.

Zatiaľ najlepšie rozpracovanou súčasťou kooperatívnej teórie hier je teória hier s voľnou tvorbou disjunktných koaličných štruktúr a s prenosnými platbami. V ďalšom výklade sa preto obmedzíme na hry tohto typu.

Kooperatívna teória vnáša do analýzy konfliktných situácií nový prvok — problém koaličnej spolupráce. Výsledok kooperatívnej hry všeobecne charakterizujeme nielen voľbami stratégií jednotlivých hráčov a z nich vyplývajúcimi platbami, ale aj rozdelením hráčov do koalícií, koordináciou postupu členov koalície a rozdelením získaných platieb vnútri koalície.

Koopertívna hra s voľnou tvorbou disjunktných koaličných štruktúr prebieha tak, že hráči utvoria nejakú koaličnú štruktúru, členovia každej koalície sa dohovoria o voľbe spoločnej stratégie, ktorá zabezpečuje čo možno najvyššiu úhrnnú platbu koalície, a získanú platbu si po skončení hry medzi sebou rozdelia podľa vopred uzatvorenej záväznej dohody. Pri analýze uvedeného typu hry sa vyskytnú tri druhy problémov:

1. Do ktorej koalície má hráč vstúpiť?
2. Akú stratégiu majú hráči každej koalície voliť, aby si zabezpečili čo možno najvyššiu úhrnnú platbu?
3. Akým spôsobom si členovia každej koalície medzi sebou rozdelia úhrnnú získanú platbu?

Kooperatívna teória hľadá odpovede na tieto tri otázky. Usiluje sa z veľkého počtu možných výsledkov separovať množiny z určitého hľadiska „prijateľných" výsledkov. Vymedzenie množín „prijateľných" výsledkov, ktoré dáva k dispozícii súčasná kooperatívna teória hier, nie je jednoznačné a každá z navrhovaných definícií má svoje slabé miesta. Spolu s výkladom základných prístupov preto upozorníme aj na úskalia, ktoré súvisia s ich prípadným použitím na analýzu konkrétnych modelov.

4.3.2 Charakteristická funkcia

Pri analýze hier s voľnou tvorbou disjunktných koaličných štruktúr a s prenosnými platbami je vhodné prejsť od modelu (4.11), t. j. od vymedzenia hry pomocou množín stratégií hráčov, funkcií platieb a množiny prípustných koaličných štruktúr, k tzv. hre v tvare charakteristickej funkcie.

Definícia 4.17

Nech $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina hráčov. Charakteristická funkcia hry s množinou hráčov P nazveme funkciu v definovanú pre všetky podmnožiny $S \subset P$, ktorá má tieto vlastnosti:

$$v(\emptyset) = 0 \tag{4.12}$$

$$v(S_1 \cup S_2) \geqq v(S_1) + v(S_2) \tag{4.13}$$

pre všetky disjunktné dvojice $S_1, S_2 \subset P$. Dvojicu (P, v) nazývame kooperatívna hra n hráčov v *tvare charakteristickej funkcie*.

Každú funkciu definovanú na všetkých podmnožinách nejakej množiny nazývame *superaditívnou*, ak spĺňa podmienku (4.13) z definície 4.17. Ak vo vzťahu (4.13) vždy platí rovnosť, potom hovoríme o aditívnej funkcii.

Charakteristická funkcia priraďuje každej koalícii $S \subset P$ číslo $v(S)$, ktoré vyjadruje „silu" koalície S. Toto číslo nazývame aj hodnota koalície S. Podmienka (4.12) z definície 4.17 hovorí, že hráči sa nikdy nezriekajú časti svojich platieb. Z podmienky (4.13) vyplýva, že hodnota koalície, ktorá vznikne zjednotením dvoch disjunktných koalícií, nemôže byť menšia ako súčet hodnôt týchto dvoch koalícií, operujúcich samostatne (t. j. „sila" celku nie je menšie ako „sila" jeho častí).

Definícia 4.18

Hru (P, v) nazývame *nepodstatná*, ak pre ľubovoľnú dvojicu disjunktných koalícií $S_1, S_2 \subset P$ platí:

$$v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2)$$

V opačnom prípade hovoríme o *podstatnej* hre.

Možno dokázať, že hra (P, v) je podstatná práve vtedy, ak

$$v(P) > \sum_{p \in P} v(\{p\})$$

kde $v(P)$ je hodnota „veľkej" koalície všetkých hráčov,
$v(\{p\})$ — hodnota „jednočlennej" koalície, ktorá sa skladá z jediného hráča p.

Z hľadiska kooperatívnej teórie nás zaujímajú predovšetkým podstatné hry. V nepodstatnej hre stráca vznik koalícií zmysel; koaličnou spoluprácou nemôže totiž ani jeden hráč nič získať. Nepodstatné hry preto skúmame ako hry s fixovanou koaličnou štruktúrou, v ktorých sú prípustné len jednočlenné koalície.

Definícia 4.19

Hru (P, v) nazývame hrou *s konštantným súčtom*, ak pre každé $S \subset P$ platí

$$v(S) + v(P - S) = v(P)$$

V hre s konštantným súčtom sa úhrnný súčet platieb pri rozdelení všetkých hráčov do dvoch disjunktných koalícií nemení. Každá hra dvoch hráčov s konštantným súčtom je nepodstatná, každá nepodstatná hra je hrou s konštantným súčtom.

Uvedieme jednu z možných interpretácií pojmu hodnota, resp. „sila" koalície. Predpokladajme, že sa utvorí nejaká neprázdna koalícia $S \subset P$. Zaujíma nás, akú úhrnnú platbu si môžu členovia tejto koalície zabezpečiť bez ohľadu na to, ako konajú ostatní hráči.

Najmenej priaznivá situácia pre koalíciu S nastane vtedy, keď ostatní účastníci utvoria jedinú protikoalíciu $P - S$ s cieľom minimalizovať úhrnnú platbu koalície S. Koalícia S môže potom voliť svoje stratégie tak, aby si zabezpečila maximálnu úhrnnú platbu proti najmenej pre ňu priaznivej stratégii koalície $P - S$. Koná teda ako maximalizujúci hráč v hre dvoch hráčov s konštantným súčtom a rozhoduje sa podľa minmaxového princípu. Hodnota každej koalície teda predstavuje jej garantovanú úhrnnú platbu, t. j. platbu, ktorú si môže vhodnou voľbou stratégií zabezpečiť za najmenej priaznivých okolností.

Na základe tejto úvahy môžeme z hry v normálnom tvare priamo odvodiť charakteristickú funkciu príslušnej kooperatívnej hry.

Príklad 4.11

Máme konečnú hru troch hráčov, kde každý hráč má dve čisté stratégie, t. j. $j_1 = 1, 2$; $j_2 = 1, 2$; $j_3 = 1, 2$. Platby hráčov pri rôznych výsledkoch uvádzame v *tab. 4.3*.

Tabuľka 4.3

j_1, j_2, j_3	M_1	M_2	M_3	$M_1 + M_2 + M_3$
1, 1, 1	2	1	3	6
1, 1, 2	1	3	1	5
1, 2, 1	3	2	1	6
1, 2, 2	−1	1	4	4
2, 1, 1	0	2	−1	1
2, 1, 2	3	0	2	5
2, 2, 1	1	3	−2	2
2, 2, 2	2	−2	3	3

Predpokladajme, že ide o kooperatívnu hru, t. j. prípustné sú všetky formálne možné koalície. Zostavíme matice platieb koalícií $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Matica platieb koalície $\{1\}$ je

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Riadky tejto matice zodpovedajú čistým stratégiám j_1 prvého hráča, stĺpce zodpovedajú spoločným čistým stratégiám (j_2, j_3) protikoalície druhého a tretieho hráča $\{2, 3\}$. Napríklad platba 3 v prvom riadku a stĺpci (2,1) zodpovedá situácii, v ktorej prvý hráč volí svoju čistú stratégiu $j_1 = 1$, druhý hráč volí svoju čistú stratégiu $j_2 = 2$ a tretí hráč volí svoju čistú stratégiu $j_3 = 1$. Nájdeme optimálnu zmiešanú stratégiu maximalizujúceho hráča v maticovej hre s touto maticou platieb. Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor $\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$ a hodnotou hry je číslo $\frac{4}{7}$. Z vlastností riešenia maticovej hry je zrejmé, že hodnota hry predstavuje strednú hodnotu platby, ktorú si maximalizujúci hráč (v našom prípade prvý hráč) môže zabezpečiť voľbou optimálnej stratégie bez ohľadu na správanie protikoalície $\{2, 3\}$. Hodnotu koalície $\{1\}$ teda predstavuje veličina $v(\{1\}) = 4/7$.

Podobne zostavíme matice platieb a príslušné hodnoty charakteristickej funkcie pre ďalšie jednočlenné koalície.

Matica platieb koalície $\{2\}$ je

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor (1, 0), hodnota charakteristickej funkcie $v(\{2\}) = 0$.

Matica platieb koalície {3} je

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$, hodnota charakteristickej funkcie $v(\{3\}) = 7/5$.

Ukážeme ďalej, ako možno zostaviť matice platieb dvojčlenných koalícií a odvodiť príslušné hodnoty charakteristickej funkcie.

Matica platieb koalície {1, 2} je takáto:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Riadky tejto matice zodpovedajú spoločným čistým stratégiám (j_1, j_2) prvého a druhého hráča {1, 2}, stĺpce zodpovedajú čistým stratégiám „protikoalície", t. j. tretieho hráča. Prvky matice platieb zodpovedajú úhrnným platbám koalície {1, 2}, t. j. súčtu platieb prvého a druhého hráča. Napríklad prvok v treťom riadku a v prvom stĺpci zodpovedá situácii, keď koalícia {1, 2} volí spoločnú čistú stratégiu (2, 1) a tretí hráč volí svoju čistú stratégiu $j_3 = 1$, a je rovný súčtu $M_1(2,1,1) + M_2(2,1,1)$ (*tab. 4.3*). Koalícia {1, 2} vystupuje teraz ako maximalizujúci hráč v maticovej hre s uvedenou maticou platieb. Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor (2/3, 1/3, 0, 0) a hodnotou hry je číslo $v = 10/3$. Koalícia {1, 2} si môže voľbou príslušnej optimálnej zmiešanej stratégie zabezpečiť, že bez ohľadu na správanie tretieho hráča nebude stredná hodnota jej úhrnnej platby nižšia ako 10/3. Hodnotu koalície teda predstavuje veličina $v(\{1, 2\}) = 10/3$.

Podobne zostavíme matice platieb a nájdeme príslušné hodnoty charakteristickej funkcie pre ďalšie dvojčlenné koalície.

Matica platieb koalície {1, 3} je

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Optimálnou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor (0, 0, 0, 1). Hodnota charakteristickej funkcie je $v(\{1, 3\}) = 5$.

Matica platieb koalície {2, 3} je

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Optimálnou stratégiou maximalizujúceho hráča je vektor (0, 1, 0, 0). Hodnota charakteristickej funkcie $v(\{2, 3\}) = 2$.

Hodnotu charakteristickej funkcie pre koalíciu všetkých hráčov dostaneme ako maximum súčtu platieb všetkých hráčov (t. j. maximálny prvok posledného stĺpca *tabuľky 4.3*). Vidíme, že v $(\{1, 2, 3\}) = 6$, pričom zodpovedajúce trojice čistých stratégií, pri ktorých sa dosahuje táto platba, sú $(j_1, j_2, j_3) = (1,1,1)$ a $(j_1, j_2, j_3) = (1,2,1)$.

Charakteristická funkcia skúmanej hry je teda nasledujúca:

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(\{1\}) = \frac{4}{7}, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = \frac{7}{5}$$
$$v(\{1,2\}) = \frac{10}{3}, \quad v(\{1,3\}) = 5, \quad v(\{2,3\}) = 2$$
$$v(\{1,2,3\}) = 6$$

Vidíme, že skúmaná hra je podstatná hra s nekonštantným súčtom.

Poznámka 4.10

Všimnime si, že uvedený princíp prechodu od normálneho tvaru hry k tvaru charakteristickej funkcie je v súlade s predpokladmi o správaní racionálnych hráčov iba vtedy, keď príslušná hra v normálnom tvare je hrou s konštantným súčtom platieb. Ak vznikne nejaká koalícia S, pre ostatných hráčov je v tomto prípade najrozumnejšie utvoriť jedinú protikoalíciu $P - S$ a maximalizovať jej úhrnnú platbu. Vzhľadom na konštantný súčet platieb tým súčasne minimalizujú úhrnnú platbu koalície S.

Pri nekonštantnom súčte platieb sa skutočné správanie racionálnych hráčov odlišuje od predpokladu, ktorý je základom na odvodenie charakteristickej funkcie z normálneho tvaru hry. Maximalizácia úhrnnej platby koalície $P - S$ už nie je v tomto prípade totožná s minimalizáciou úhrnnej platby koalície S. Charakteristická funkcia preto už nevyjadruje správanie hráčov, ktoré by sme mohli intuitívne považovať za úplne rozumné.

Opísaným spôsobom definovaná hodnota koalície však aj vtedy poskytuje určitú informáciu o sile koalície a jej postavení v konfliktnej situácii. Môžeme ju považovať za „garančnú platbu" koalície v tom zmysle, v akom sme definovali pojem garančnej platby hráča v nekooperatívnej hre.

Charakteristickú funkciu kooperatívnej hry môžeme často formulovať bez nadväznosti na hru v normálnom tvare. Potom však oprávnenosť úvah z poznámky 4.10 odpadá.

Príklad 4.12

Traja hráči hlasujú o určitom návrhu, ktorého prijatie si vyžaduje jednoduchú väčšinu (v našom prípade dva hlasy). Každý hráč má dve možnosti — hlasovať za návrh alebo proti nemu. Ak je návrh prijatý dvoma hlasmi, dostanú hráči, ktorí hlasovali za návrh, od hráča, ktorý hlasoval proti, dve jednotky. Ak sú všetci hráči za návrh, neplatí nikto nič. Ak sú dvaja hráči proti, dostanú od hráča, ktorý hlasoval za návrh, dve jednotky.

Charakteristickú funkciu tejto hry môžeme zapísať takto:

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -2$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 2$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 0$$

4.3.3 Axiómy racionality

Prejdeme teraz k analýze kooperatívnej hry (P, v). Zaujíma nás, do akých výsledkov vyústi táto hra, ak sa jej účastníci správajú racionálne, resp. aký návod na konanie môžeme dať hráčom a koalíciám.

Charakteristická funkcia implicitne poskytuje informáciu o stratégiách, ktoré sú pre každú koalíciu optimálne (túto informáciu získame napr. pri odvodzovaní charakteristickej funkcie z normálneho tvaru hry) a o hodnotách (zaručených úhrnných platbách) jednotlivých koalícií. Obsahuje teda odpoveď na druhú otázku zo stati 4.3.1. Zostáva nám odpovedať na dve zvyšné otázky.

Výsledok konfliktnej situácie, modelovanej pomocou kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie, sa určuje dvoma faktormi — rozdelením hráčov do koalícií (t. j. koaličnou štruktúrou) a rozdelením platieb hráčov vo vnútri každej koalície. Vzniká otázka, aké vlastnosti by mali spĺňať koaličné štruktúry a im zodpovedajúce rozdelenia platieb, ktoré môžeme považovať za „prijateľné“ výsledky (riešenia) kooperatívnej hry. Teoretická analýza vychádza z nasledujúcich dvoch všeobecných požiadaviek:

1. Prijateľné výsledky by mali vyhovovať určitým intuitívne zdôvodniteľným axiómam racionality.
2. Každý z prijateľných výsledkov by mal byť stabilný v tom zmysle, že nejestvujú dostatočné motívy na jeho zmenu.

Sformulujeme preto základné axiómy, ktoré sa používajú v kooperatívnej teórii hier.

Označíme ako x_p podiel p-tého hráča na úhrnnej platbe koalície, ktorej je členom. Z definície charakteristickej funkcie vyplýva, že pre ľubovoľnú koaličnú štruktúru

$$(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_k)$$

platí

$$\sum_{i=1}^{k} v(B_i) \leqq v(P)$$

t. j. $v(P)$ je maximálna suma, ktorú si hráči môžu medzi sebou rozdeliť.

Definícia 4.20

Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazveme rozdelením v hre (P, v), ak platí

$$\sum_{p=1}^{n} x_p \leqq v(P)$$

Rozdelenie $\boldsymbol{x}$ vyhovuje axióme *individuálnej* racionality, ak pre každé $p \in P$ platí

$$x_p \geqq v(\{p\})$$

Rozdelenie $\boldsymbol{x}$ vyhovuje axióme *kolektívnej* racionality, ak platí

$$\sum_{p=1}^{n} x_p = v(P)$$

Rozdelenie $\boldsymbol{x}$ vyhovuje axióme *koaličnej* racionality vzhľadom na koalíciu $S \subset P$, ak platí

$$\sum_{p \in S} x_p = v(S)$$

pričom pre všetky $S' \subset S$

$$\sum_{p \in S'} x_p \geqq v(S')$$

Axióma individuálnej racionality je celkom prirodzená — ani jeden hráč nesúhlasí s takou dohodou o rozdelení platieb, ktorá mu nedáva aspoň toľko, koľko si môže zabezpečiť samostatným postupom.

Aj axióma kolektívnej racionality (niekedy v literatúre nazývaná aj axióma paretovskej optimality) zodpovedá bežným predstavám o racionálnom správaní. Hovorí, že hráči si medzi sebou rozdelia maximálnu sumu, ktorú môžu v kooperatívnej hre získať. Rozdelenie, ktoré nie je kolektívne racionálne, má tú vlastnosť, že platbu aspoň jedného hráča možno zvýšiť bez toho, aby sa znížili platby ostatných hráčov.

Axióma koaličnej racionality hovorí, že nijaká subkoalícia koalície S nemôže zabezpečiť jej členom vyššie platby než koalícia S. Pri tomto rozdelení $\boldsymbol{x}$ neexistujú teda dôvody na rozpad koalície na menšie samostatné zoskupenia.

Predpokladajme, že sa utvorí nejaká koaličná štruktúra $B = (B_1, \dots, B_i, \dots, B_k)$. Každé rozdelenie $\boldsymbol{x}$, ktoré zodpovedá tejto koaličnej štruktúre, je teda súborom dohôd o rozdelení platieb v rámci existujúcich koalícií. V koalícii B_i sa možno dohovoriť iba o rozdelení tej sumy, ktorú si koalícia zabezpečí samostatným postupom, t. j. veličiny $v(B_i)$. V súvislosti s koaličnou štruktúrou B skúmame preto iba rozdelenie, pre ktoré

$$\sum_{p \in B_j} x_p = v(B_i), \qquad i = 1, 2, \dots, k \tag{4.14}$$

Definícia 4.21

Nech $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$ je koaličná štruktúra a $\boldsymbol{x}$ je také rozdelenie, že pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$ platí vzťah (4.14). Dvojicu $\{\boldsymbol{x}, B\}$ potom nazveme *formáciou platieb* v hre (P, v). Formáciu platieb $\{\boldsymbol{x}, B\}$ nazývame

a) individuálne racionálna, ak je rozdelenie $\boldsymbol{x}$ individuálne racionálne,

b) kolektívne racionálna, ak je rozdelenie $\boldsymbol{x}$ kolektívne racionálne,

c) koaličnе racionálna, ak je rozdelenie $\boldsymbol{x}$ koaličnе racionálne vzhľadom na všetky koalície $B_i \in B$.

Každá koaličnе racionálna formácia platieb je súčasne aj individuálne racionálna. Zrejmé je, že formácia platieb je kolektívne racionálna práve vtedy, keď platí

$$\sum_{i=1}^{k} v(B_i) = v(P)$$

4.3.4 Neumannove-Morgensternove riešenia

V tejto stati vysvetlíme klasickú teóriu kooperatívnych hier s prenosnými platbami, základom ktorej sú pojmy a princípy formulované ešte J. VON NEUMANNOM a O. MORGENSTERNOM v ich prvej práci o teórii hier [47]. Východiskom prístupu týchto autorov je predpoklad o tom, že prijateľné sú iba individuálne a kolektívne racionálne formácie platieb.

Definícia 4.22

Kolektívne a individuálne racionálne rozdelenie $\boldsymbol{x}$ nazývame *imputácia*. Množinu všetkých imputácií v hre (P, v) označíme $E(v)$.

Poznámka 4.11

Vieme, že v ľubovoľnej kolektívne a individuálne racionálnej formácii platieb $\{\boldsymbol{x}, B\}$ je rozdelenie $\boldsymbol{x}$ imputáciou. Každej imputácii môžeme priradiť aspoň jednu koaličnú štruktúru tak, že výsledná formácia platieb je kolektívne racionálna. V teórii, ktorá vychádza z uvedeného predpokladu o racionalite hráčov, môžeme preto všetky úvahy formulovať v kategóriách imputácií a upustiť od

explicitného použitia formácií platieb. Ak poznáme nejakú imputáciu, ľahko z nej odvodíme príslušné koaličné štruktúry, pri ktorých sa táto imputácia dosahuje.

Množina imputácií hry (P, v)

$$E(v) = \left\{ \boldsymbol{x} \in E_n,\ \sum_{p=1}^{n} x_p = v(P),\ x_p \geqq v(\{P\}) \right\}$$

je konvexný polyéder. Pre nepodstatnú hru obsahuje množina $E(v)$ jediný prvok. Ďalej budeme venovať pozornosť iba podstatným hrám.

Definícia 4.23

Nech $S \subset P$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E(v)$. Hovoríme, že $\boldsymbol{x}$ *dominuje* $\boldsymbol{y}$ vzhľadom na koalíciu S, ak platí

$$x_p > y_p \qquad \text{pre všetky } p \in S$$

$$\sum_{p \in S} x_p \leqq v(S)$$

Reláciu „$\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$ vzhľadom na S" zapisujeme takto:

$$\boldsymbol{x} \operatorname*{dom}_{S} \boldsymbol{y}$$

Definíciu 4.23 môžeme interpretovať takto: Imputácia $\boldsymbol{x}$ je z hľadiska koalície S lepšia ako $\boldsymbol{y}$, ak je prípustná (t. j. možno ju dosiahnuť samostatným postupom koalície S) a ak všetkým členom koalície S zabezpečuje vyššie platby ako imputácia $\boldsymbol{y}$. Zrejmé je, že členovia koalície S budú namietať proti dohode o voľbe imputácie $\boldsymbol{y}$, pretože existuje imputácia, ktorá je pre nich výhodnejšia.

Definícia 4.24

Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E(v)$. Hovoríme, že $\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$, ak aspoň pre jednu koalíciu $S \in P$ platí

$$\boldsymbol{x} \operatorname*{dom}_{S} \boldsymbol{y}$$

Reláciu „$\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$" zapíšeme ako

$$\boldsymbol{x} \operatorname{dom} \boldsymbol{y}$$

Táto relácia nemá vlastnosti „dobre sa správajúcich" relácií, napr. nie je tranzitívna. Pre dvojicu imputácií $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ môžu nastať všetky tri logicky mysliteľné prípady:

$\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{y}$ dominuje $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{y}$ nedominuje $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}$ nedominuje $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{y}$ nedominuje $\boldsymbol{x}$

Preto pri rozbore kooperatívnej hry na základe uvedenej relácie nemôžeme použiť bežné matematické pojmy (napr. pojem extrém). Vlastnosti vzťahu dominácie ilustrujeme na príklade.

Príklad 4.13

Máme kooperatívnu hru troch hráčov s charakteristickou funkciou

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

Preskúmajme imputácie

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}\right)$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{6}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right)$$

Ľahko sa presvedčíme o tom, že $\boldsymbol{x}$ nedominuje $\boldsymbol{y}$ ani $\boldsymbol{y}$ nedominuje $\boldsymbol{x}$. Máme ďalej imputácie

$$\boldsymbol{x}' = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y}' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Zrejmé je, že $\boldsymbol{x}'$ dominuje $\boldsymbol{y}'$ vzhľadom na koalíciu $\{2, 3\}$, pričom $\boldsymbol{y}'$ nedominuje $\boldsymbol{x}'$.

Predpokladajme, že pre charakteristickú funkciu kooperatívnej hry piatich hráčov platí

$$v(\{1, 2\}) = v\{3, 4\} = \frac{1}{2}$$

$$v(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 1$$

Preskúmajme imputácie

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$$

Ľahko sa presvedčíme o tom, že $\boldsymbol{x}$ dominuje $\boldsymbol{y}$ vzhľadom na koalíciu $\{1, 2\}$ a $\boldsymbol{y}$ dominuje $\boldsymbol{x}$ vzhľadom na koalíciu $\{3, 4\}$.

Neumannove-Morgensternove riešenia (skrátene riešenia N-M) predstavujú historicky prvý prístup k analýze kooperatívnej hry n hráčov.

Definícia 4.25

Množinu $V \subset E(v)$ nazveme riešením N-M hry (P, v), ak

a) ľubovoľné dve imputácie z V sa navzájom nedominujú (tzv. podmienka internej stability);

b) pre každú imputáciu, ktorá nepatrí do V, existuje aspoň jedna imputácia z V, ktorá ju dominuje (tzv. podmienka externej stability).

Intuitívne môžeme „rozumnosť" riešenia N-M interpretovať takto: Každú imputáciu, ktorá nepatrí do V, možno vetovať pomocou niektorej imputácie z V. Imputácie z V si medzi sebou nekonkurujú, nijaká koalícia nemá silu vetovať imputáciu z V inou imputáciou z tej istej množiny V. Poznamenávame však, že definícia 4.25 nevylučuje možnosť existencie imputácie z množiny V, ktorú dominuje nejaká imputácia nepatriaca do tejto množiny.

Príklad 4.14

Preskúmajme hru troch hráčov s charakteristickou funkciou

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

Nech máme tri imputácie tejto hry

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ani jedna z týchto troch imputácií nedominuje inú zo zvyšujúcich dvoch imputácií. Okrem toho môžeme ľahko dokázať, že ľubovoľnú z ostatných imputácií dominuje aspoň jedna z týchto troch imputácií (preto, aby niektorú z ostatných imputácií dominovala nejaká z týchto troch imputácií, musela by mať dominujúca imputácia dva prvky väčšie ako 1/2, čo pri tejto charakteristickej funkcii nie je možné).

Uvedená množina imputácií však nie je jediným riešením N-M skúmanej hry.

Ľahko zistíme, že aj množina

$$V_{3c} = \{(x_1, 1 - c - x_1, c), 0 \leqq x_1 \leqq 1 - c\}$$

je riešením N – M pre ľubovoľné $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Analogicky platí, že riešeniami N – M sú aj množiny

$$V_{2c} = \{1 - c - x_3, c, x_3), 0 \leqq x_3 \leqq 1 - c\}$$

$$V_{1c} = \{(c, x_2, 1 - c - x_2), 0 \leqq x_2 \leqq 1 - c\}$$

pre ľubovoľné $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Z príkladu 4.14 možno usúdiť, prečo bol pojem riešenia N – M predmetom viacerých kritických podmienok. Uvedieme niektoré problémy, ktoré vznikajú pri aplikácii tohto pojmu ako riešenia kooperatívnej hry.

Riešenie N – M nie je určené jednoznačne. Môže existovať alebo jediné riešenie N – M, alebo nekonečne veľa riešení N – M, pričom niektoré z nich môžu byť konečné a iné nekonečné. Okrem toho existujú hry, v ktorých každá imputácia je prvkom niektorého z riešení N – M (s takouto situáciou sa stretávame v príklade 4.14). V tomto prípade nám pojem riešenie N – M nehovorí takmer nič o tom, ako sa správať v konkrétnej konfliktnej situácii, ktorá je modelovaná kooperatívnou hrou. Na druhej strane existujú hry, ktoré nemajú ani jedno riešenie N – M. Existencia riešení N – M sa vo všeobecnosti dokázala maximálne pre hru piatich hráčov. Neexistujú účinné výpočtové metódy, ktoré by umožnili opísať všetky riešenia N – M alebo zistiť, že riešenie N – M neexistuje.

Tieto a iné komplikácie, spojené s pojmom riešenie N – M, viedli k hľadaniu nových koncepcií riešenia kooperatívnych hier.

4.3.5 *C* jadro hry

Pojem *C* jadra kooperatívnej hry (v angličtine „core", t. j. „jadro") vychádza z logickej schémy NEUMANNA a MORGENSTERNA, t. j. z požiadavky kolektívnej a individuálnej racionality, a je definovaný v kategóriách dominácie imputácií. Odstraňuje však niektoré z nedostatkov pojmu riešenie N – M.

Definícia 4.26

Nech $E(v)$ je množina všetkých imputácií hry (P, v). *C jadrom* tejto hry nazývame podmnožinu $C \subset E(v)$ všetkých nedominovaných imputácií.

Imputácie z *C* jadra sa navzájom nedominujú. Imputácie, ktoré nepatria do *C* jadra, nedominujú nijakú imputáciu z *C* jadra.

Intuitívne môžeme interpretovať „rozumnosť" pojmu *C* jadra ako riešenia kooperatívnej hry takto: Každá imputácia z *C* jadra vyhovuje všetkým trom axiómam racionality — je individuálne racionálna, kolektívne racionálna a koaličné racionálna vzhľadom na koalíciu všetkých hráčov. Môžeme ju považovať za stabilnú v tom zmysle, že neexistuje koalícia, ktorá by mala silu ju zmeniť. Dohoda o rozdelení platieb a spoločnom postupe, ktorá zodpovedá určitému prvku z *C* jadra, je prijateľná pre všetkých hráčov a pre potenciálne koalície, zatiaľ čo dohodu, v ktorej imputácia nie je z *C* jadra, bude vetovať aspoň jedna koalícia, ktorá môže samostatným postupom získať viac.

V súvislosti s pojmom *C* jadra nás zaujíma otázka jeho výpočtu, resp. otázka jeho existencie.

Veta 4.4

C jadro kooperatívnej hry (P, v) určíme ako množinu všetkých riešení sústavy lineárnych nerovníc

$$\sum_{p \in P} x_p = v(P)$$

$$\sum_{p \in S} x_p \geqq v(S)$$

pre všetky $S \subset P$.

Z vety 4.4 vidíme, že *C* jadro môžeme hľadať metódami lineárneho programovania. *C* jadro je konvexným polyédrom a vhodne upravená simplexová metóda lineárneho programovania umožňuje nájsť krajné riešenia sústavy lineárnych nerovníc (a teda všetky krajné body príslušného konvexného polyédra), alebo zistiť, že sústava lineárnych nerovníc nemá riešenie.

Príklad 4.15

Preskúmajme kooperatívnu hru troch hráčov s charakteristickou funkciou

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = \frac{1}{3},\quad v(\{1, 3\}) = \frac{1}{2},\quad v(\{2, 3\}) = \frac{2}{3}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

Podľa vety 4.4 určíme *C* jadro tejto hry ako množinu všetkých riešení sústavy

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 \qquad \geqq \frac{1}{3}$$

$$x_1 \qquad + x_3 \geqq \frac{1}{2}$$

$$x_2 + x_3 \geqq \frac{2}{3}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqq 0$$

Táto sústava má štyri krajné riešenia:

$$\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

Každá konvexná lineárna kombinácia týchto štyroch krajných riešení je prvkom C jadra skúmanej hry.

Z predchádzajúceho výkladu vyplýva, že C jadro je veľmi silný pojem, ktorý môžeme prijať ako vyhovujúcu definíciu riešenia kooperatívnej hry (P, v). Problém je však v tom, že existujú celé triedy hier, ktoré majú C jadro prázdne. Napríklad každá podstatná hra s konštantným súčtom má prázdne C jadro. Neprázdnosť C jadra nie je zaručená ani pre podstatné hry s nekonštantným súčtom.

Ani pojem riešenie N – M, ani pojem C jadro neposkytujú dostatočne všeobecné riešenie pre ľubovoľnú kooperatívnu hru. Ukazuje sa, že na báze imputácií sa problém všeobecného vymedzenia prijateľných tried výsledkov v ľubovoľnej kooperatívnej hre nedá riešiť. Pri hľadaní ďalších definícií optimálneho rozhodovania v kooperatívnych hrách sa preto upúšťa od pojmu imputácia.

4.3.6 Vyjednávacia množina

Nevýhodou pojmov riešenie N – M a C jadro hry je, že neobjasňujú, čo sa v priebehu skutočnej kooperatívnej hry robí. Tieto pojmy sú v podstate konzistentné s predpokladom, že všetci hráči utvoria jedinú „veľkú" koalíciu a celý problém sa redukuje na úvahy o tom, ako rozdeliť platby v rámci tejto koalície;

je to implicitne obsiahnuté v požiadavke kolektívnej racionality. Reálne konflikty sa však len zriedkavo vyznačujú takouto harmóniou. Preto upustíme od predpokladu kolektívnej racionality a budeme analyzovať výsledky v kategóriách formácií platieb. Pokúsime sa zobraziť proces formovania, rozpadu a premeny koaličných štruktúr.

R. Aumann a M. Maschler navrhli pojem riešenia kooperatívnej hry, ktorý vychádza z principiálne odlišnej logiky ako pojmy riešenie N – M a C jadro, a nazvali ho *vyjednávacia množina* (v angličtine „bargaining set").

Predpokladajme, že pri vzniku koaličnej štruktúry $B = (B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_k)$ sa najprv v každej koalícii B_i rokuje o rozdelení garantovanej úhrnnej platby medzi jej členov. Zrejmé je, že koalícia, pre ktorú neexistuje koaličné racionálne rozdelenie platieb, sa rozpadne. Teda prvým prijateľným predpokladom je, že vznikajú iba koaličné racionálne formácie platieb $\{\boldsymbol{x}, B\}$.

Preskúmajme teraz koaličné racionálnu formáciu platieb

$$\{(x_1, \ldots, x_n); (B_1, \ldots, B_k)\} = \{\boldsymbol{x}, B\}$$

Vzniká otázka, ako sa správajú členovia jednotlivých koalícií. Koaličná racionalita je určitý typ vnútornej stability koalícií, pri ktorej neexistujú dôvody na rozpad koalícií na menšie zoskupenia. Môžu však vznikať iné procesy. Hráči alebo skupiny hráčov v rámci koalície môžu skúmať možnosti vystúpenia z koalície alebo pripojenia sa k inej koalícii.

Nech $T = (T_1, T_2, \ldots, T_m)$ je nejaká koaličná štruktúra a M je skupina hráčov. Množinou *partnerov* skupiny M vzhľadom na koaličnú štruktúru T nazývame množinu

$$P(M, T) = \{p \in T_s, \ T_s \cap M \neq \emptyset\}$$

Poznámka 4.12

Hráč p je teda partnerom skupiny M, ak patrí do rovnakej koalície z koaličnej štruktúry T ako niektorí z členov skupiny M. Z hľadiska formálnej definície je každý člen M aj partnerom skupiny M.

Definícia 4.27

Nech $\{\boldsymbol{x}, T\}$ je koaličné racionálna formácia platieb hry (P, v), M a L sú neprázdne disjunktné podmnožiny koalície $T_s \in T$, t. j. $M, L \in T_s$ a $M \cap L = \emptyset$. *Námietkou* skupiny M proti skupine L nazveme takú koaličné racionálnu formáciu platieb

$$\{y, U\} = \{(y_1, \ldots, y_n); (U_1, \ldots, U_r)\}$$

že platí

a) $P(M, U) \cap L = \emptyset$,
b) $y_p > x_p$ pre všetky $p \in M$,
c) $y_p \geqq x_p$ pre všetky $p \in P(M, U)$.

Objasníme intuitívne túto definíciu. Hráči zo skupiny M nie sú spokojní so svojimi podielmi na úhrnnej platbe koalície T_s. Vyhrážajú sa ostatným členom tejto koalície, že ak sa nezvýšia ich podiely, z koalície vystúpia. Táto hrozba má však opodstatnenie len vtedy, keď môžu s hráčmi z ostatných koalícií (bez pomoci hráčov z L) utvoriť takú koaličnе racionálnu štruktúru, že v príslušnej formácii platieb môžu počítať s väčšími platbami, než mali pri formácii $\{\boldsymbol{x}, T\}$, a pritom môžu ponúknuť svojim potenciálnym partnerom aspoň toľko, koľko mali pri formácii $\{\boldsymbol{x}, T\}$.

Preskúmajme ďalej, ako na túto hrozbu budú reagovať hráči zo skupiny L.

Definícia 4.28

Nech $\{\boldsymbol{x}, T\}$ je koaličnе racionálna formácia platieb, $M, L \in T_s$ a $\{\boldsymbol{y}, U\}$ je námietka M proti L. *Protinámietkou* L proti M potom nazveme takú koaličnе racionálnu formáciu platieb

$$\{\boldsymbol{z}, V\} = \{(z_1, \ldots, z_n); (V_1, \ldots, V_t)\}$$

že platí

a) $M \cap P(L, V) = \emptyset$,

b) $z_p \geqq x_p$ pre všetky $p \in P(L, V)$,

c) $z_p \geqq y_p$ pre všetky $p \in P(L, V) \cap P(M, U)$.

Intuitívne môžeme definíciu 4.28 vysvetliť takto: Členovia skupiny L hovoria hráčom z M: „Ak chcete realizovať svoju hrozbu, môžeme bez vašej pomoci utvoriť takú koaličnе racionálnu formáciu platieb, v ktorej si zabezpečíme aspoň také platby, ktoré sme mali vo formácii $\{\boldsymbol{x}, T\}$, a pritom zabezpečíme vašim potenciálnym partnerom, ktorých potrebujete na utvorenie novej formácie, aspoň také platby, ktoré by získali vo formácii $\{\boldsymbol{y}, U\}$." Teda existencia protinámietky blokuje možnosť realizácie námietky.

Teraz už môžeme pristúpiť k definícii vyjednávacej množiny.

Definícia 4.29

Koaličnе racionálnu formáciu platieb nazývame stabilná, ak proti každej námietke skupiny M proti ľubovoľnej skupine L existuje protinámietka L proti M. Vyjednávacou množinou nazveme množinu všetkých stabilných formácií platieb hry (P, v).

Možno dokázať, že pre ľubovoľnú kooperatívnu hru (P, v) je vyjednávacia množina neprázdna, pričom C jadro hry (ak existuje) je vždy súčasťou vyjednávacej množiny.

Príklad 4.16

Preskúmajme kooperatívnu hru troch hráčov s charakteristickou funkciou

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 2$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 3$$

Predpokladajme, že vznikajú iba koaličnе racionálne formácie platieb. Formácia platieb s koaličnou štruktúrou, ktorá sa skladá iba z koalície všetkých hráčov, nie je v tomto prípade koaličnе racionálna (C jadro tejto hry je prázdne).

Ľahko sa presvedčíme o tom, že každá dvojčlenná koalícia v tejto hre je vnútorne stabilná v tom zmysle, že existuje príslušné koaličnе racionálne rozdelenie platieb. Z formálneho hľadiska je vnútorne stabilná aj každá jednočlenná „koalícia".

Ukážeme, ako overiť, či niektorá formácia platieb je stabilná v zmysle definície 4.29, t. j. či je prvkom vyjednávacej množiny. Preskúmajme napr. formáciu platieb

$$\{\boldsymbol{x}, T\} = \{(1, 1, 0); (\{1, 2\}, \{3\})\}$$

Táto formácia platieb je zrejme koaličnе racionálna. Nech $M = \{1\}$, $L = \{2\}$ a $U = (\{1, 3\}, \{2\})$. Potom $\{1, 3\}$ je zrejme jediná koalícia, do ktorej môže prvý hráč vstúpiť, ak nespolupracuje s druhým hráčom. Námietkou M proti L (v našom prípade prvého hráča proti druhému) je každá formácia platieb

$$\{\boldsymbol{y}, U\} = \{(y_1, 0, y_3); (\{1, 3\}, \{2\})\}$$

ktorá je koaličnе racionálna a pre ktorú platí

$$y_1 + y_3 = 3,\ y_1 > 1,\ y_3 \geqq 0$$

Z tejto sústavy vyplýva, že $1 < y_1 \leq 3$ a $y_3 = 3 - y_1$.

Preskúmame ďalej protinámietky $L = \{2\}$. Ak druhý hráč nespolupracuje s prvým hráčom, môže spolupracovať iba s tretím hráčom. Protinámietkou L proti M bude každá koaličnе racionálna formácia platieb

$$\{\boldsymbol{z}, V\} = \{(0, z_2, z_3); (\{1\}, \{2, 3\})\}$$

pre ktorú platí

$$z_2 + z_3 = 2,\ z_2 \geq 1,\ z_3 \geq 3 - y_1$$

Z tejto sústavy vyplýva, že pre $2 \geqq y_1 > 1$ sú posledné dve nerovnice nekonzistentné. Existujú teda také námietky prvého hráča proti druhému hráčovi, pre ktoré nemá druhý hráč protinámietky. Preto pôvodná formácia platieb $\{\boldsymbol{x}, T\}$ nie je stabilná a nepatrí do vyjednávacej množiny.

Preskúmajme teraz formáciu platieb

$$\{x, T\} = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right); (\{1, 2\}, \{3\})\right\}$$

a aplikujme ten istý postup. Zistíme, že proti každej námietke prvého hráča existuje protinámietka druhého hráča a naopak, t. j. táto formácia je stabilná a je prvkom vyjednávacej množiny.

Poznámka 4.13

1. Pri nepatrných zmenách východiskových predpokladov môžeme definovať rôzne triedy vyjednávacích množín. Podrobnú analýzu vyjednávacej množiny, jej vlastností, modifikácií a numerického odvodenia obsahuje napr. [4].

2. Z podobnej logiky ako vyjednávacia množina vychádza aj pojem tzv. *K* jadra hry (z anglického „kernel", t. j. „vnútrajšok jadra"), ktorý zaviedli M. Davis a M. Maschler (pozri napr. [5]). Tento pojem upúšťa od požiadavky koaličnej racionality a hľadá stabilné výsledky medzi individuálne racionálnymi formáciami platieb.

4.3.7 *N* jadro hry

Nevýhodou rôznych tried výsledkov, ktoré sme doteraz definovali, je ich mnohoznačnosť. Hovoria nám spravidla toľko: „Ak sa daná hra nachádza v tom či onom stave, neexistuje dôvod na jeho zmenu". Z normatívneho hľadiska neposkytuje jednoznačný predpis, podľa ktorého sa majú správať racionálni účastníci konfliktu, modelovaného kooperatívnou hrou.

Veľmi užitočný pojem všeobecného riešenia kooperatívnej hry n hráčov s prenosnými platbami, tzv. *N* jadro (z anglického „nucleolus", t. j. „jadierko") navrhol v roku 1968 D. Schmeidler. Tento pojem vychádza z predpokladu, že všetci hráči v kooperatívnej hre majú záujem dohodnúť sa o individuálne a kolektívne racionálnom rozdelení (t. j. imputácii), ktorá vyvolá v istom zmysle „najmenšie námietky" potenciálnych koalícií. Ide teda o kompromisné riešenie v rámci spolupráce všetkých hráčov.

Nech

$$\boldsymbol{x} \in E(v)$$

je imputácia v hre (P, v). Množinu všetkých neprázdnych koalícií v hre n hráčov označíme ako R_0, kde R_0 obsahuje $r = 2^n - 1$ prvkov.

Veličinu

$$d(\boldsymbol{x}, S) = v(S) - \sum_{p \in S} x_p$$

nazveme diferenciou koalície $S \subset P$ vzhľadom na imputáciu $\boldsymbol{x}$.

Zrejmé je, že ak $d(x, S) > 0$, potom koalícia S môže vetovať dohodu o imputácii $\boldsymbol{x}$, pretože si môže samostatným postupom zabezpečiť vyššiu úhrnnú

platbu, ako jej ponúka daná imputácia. Ak $d(\boldsymbol{x}, S) \leq 0$, potom koalícia S nie je schopná vetovať dohodu o imputácii $\boldsymbol{x}$, pretože samostatný postup jej nezabezpečí vyššiu úhrnnú platbu. V každom prípade má koalícia S záujem na tom, aby diferencia $d(\boldsymbol{x}, S)$ bola čo najmenšia. Pri rokovaní o návrhu dohody o imputácii $\boldsymbol{x}$ bude najviac namietať koalícia s najvyššou diferenciou.

Nech $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in E(v)$ sú dve imputácie v hre (P, v) a R_0 je množina všetkých potenciálnych neprázdnych koalícií.

Imputácia $\boldsymbol{x}$ je prijateľnejšia ako imputácia $\boldsymbol{y}$, ak

$$\max_{S \in R_0} d(\boldsymbol{x}, S) < \max_{S \in R_0} d(\boldsymbol{y}, S)$$

Inými slovami, prijateľnejšia je taká z dvoch imputácií, ktorá vyvolá menšiu maximálnu námietku. V prípade, že maximálne diferencie pre imputácie $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ sú rovnaké, porovnáme nasledujúce diferencie čo do veľkosti, a imputácia $\boldsymbol{x}$ bude prijateľnejšia ako imputácia $\boldsymbol{y}$, ak druhá diferencia čo do veľkosti pre $\boldsymbol{x}$ bude menšia ako druhá čo do veľkosti diferencia pre $\boldsymbol{y}$ atď.

Sformulujeme reláciu „imputácia $\boldsymbol{x}$ je prijateľnejšia ako imputácia $\boldsymbol{y}$" všeobecne. Pre každú imputáciu $\boldsymbol{x} \in E(v)$ definujeme vektor $T(\boldsymbol{x})$ tak, že

$$T_k(\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{x}, S_k)$$

kde $S_k \in R_0$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, pričom platí, že pre ľubovoľné i, j také že $i < j$

$$T_i(\boldsymbol{x}) \geqq T_j(\boldsymbol{x})$$

Vektor

$$T(\boldsymbol{x}) = (T_1(\boldsymbol{x}), T_2(\boldsymbol{x}), \ldots, T_r(\boldsymbol{x}))$$

teda vznikne usporiadaním diferencií všetkých mysliteľných koalícií zostupne (od najväčšej k najmenšej).

Vektor $T(\boldsymbol{x})$ je *lexikograficky menší* ako vektor $T(\boldsymbol{y})$, ak $T(\boldsymbol{x}) \neq T(\boldsymbol{y})$ a prvá nenulová zložka vektora

$$T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y})$$

je záporná. Reláciu „lexikograficky menší" zapisujeme

$$T(\boldsymbol{x}) \text{ lex} < T(\boldsymbol{y})$$

Vektor $T(\boldsymbol{x})$ je *lexikograficky menší* alebo rovný vektoru $T(\boldsymbol{y})$, ak alebo $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$, alebo $T(\boldsymbol{x})$ je lexikograficky menší ako $T(\boldsymbol{y})$. Túto reláciu zapisujeme

$$T(\boldsymbol{x}) \text{ lex} \leqq T(\boldsymbol{y})$$

Definícia 4.30

Imputácia $\boldsymbol{x}$ je prijateľnejšia ako imputácia $\boldsymbol{y}$, ak platí

$$T(\boldsymbol{x}) \text{ lex} < T(\boldsymbol{y})$$

Imputácie $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ sú rovnako prijateľné, ak

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$$

Na základe uvedených úvah môžeme definovať „najprijateľnejšiu" imputáciu.

Definícia 4.31

N jadrom kooperatívnej hry (P, v) nazývame takú imputáciu $\boldsymbol{x}_0 \in E(v)$, pre ktorú

$$T(\boldsymbol{x}_0) \text{ lex} \leqq T(\boldsymbol{x})$$

pre všetky $\boldsymbol{x} \in E(v)$.

Inými slovami, N jadro je také individuálne a kolektívne racionálne rozdelenie (imputácia), pre ktoré, v porovnaní s ostatnými imputáciami, je maximálna námietka čo najnižšia.

Možno dokázať nasledujúce tvrdenie o vlastnostiach N jadra kooperatívnej hry:

Veta 4.5

a) Pre každú kooperatívnu hru (P, v) existuje práve jedno N jadro.

b) Ak C jadro kooperatívnej hry (P, v) nie je prázdne, potom N jadro je prvkom C jadra hry.

c) N jadro kooperatívnej hry je vždy prvkom vyjednávacej množiny tejto hry.

Na výpočet N jadra kooperatívnej hry môžeme upraviť známe metódy lineárneho programovania.

4.3.8 Shapleyho hodnota hry

Úplne odlišný prístup k riešeniu kooperatívnej hry (P, v) navrhol v roku 1953 L. S. Shapley. Pre jeho pojem riešenia sa v literatúre zaužíval názov *Shapleyho hodnota* kooperatívnej hry. Tento pojem vychádza z apriórneho ocenenia pozície a sily každého hráča z hľadiska možností koaličnej spolupráce.

L. S. Shapley priradil každému hráčovi v hre (P, v) číslo $h_p(v)$, ktoré nazval hodnota p-tého hráča. Vektor

$$\boldsymbol{h}(v) = (h_1(v), h_2(v), \ldots, h_n(v))$$

hodnôt jednotlivých hráčov odvodil na základe týchto predpokladov:

a) Hodnota hráča závisí iba od charakteristickej funkcie, a nie od označenia hráča. Ak majú hráči i a j v hre (P, v) také postavenie, že hodnota charakteristickej funkcie pre ľubovoľnú koalíciu sa nezmení, keď v nej zameníme hráča i za hráča j, tak hodnota hry pre obidvoch hráčov je rovnaká.

b) Vektor $\boldsymbol{h}(v)$ hodnôt jednotlivých hráčov v hre (P, v) je imputáciou.

c) Ľahko sa presvedčíme o tom, že súčet dvoch charakteristických funkcií u a v hier (P, u) a (P, v) je charakteristickou funkciou $w = u + v$ novej hry (P, w). Súčet vektorov hodnôt jednotlivých hráčov v hrách (P, u) a (P, v) sa potom rovná vektoru hodnôt v hre (P, w), teda

$$\boldsymbol{h}(w) = \boldsymbol{h}(u) + \boldsymbol{h}(v)$$

Shapley dokázal, že týmto trom predpokladom vyhovuje jediný vektor $\boldsymbol{h}(v)$ taký, že

$$h_p(v) = \sum_{\substack{S \in P \\ p \in S}} Q(S)\,[v(S) - v(S - \{p\}] \tag{4.15}$$

kde

$$Q(S) = \frac{(|S| - 1)!\,(n - |S|)!}{n!} \tag{4.16}$$

pričom $|S|$ je počet prvkov množiny S. Suma (4.15) sa berie podľa všetkých koalícií, ktorých členom môže byť hráč p.

Definícia 4.32

Vektor $\boldsymbol{h}(v) = (h_1(v), h_2(v), \ldots, h_n(v))$, ktorého zložky sú definované vzťahmi (4.14) a (4.15), sa nazýva Shapleyho vektor alebo Shapleyho hodnota kooperatívnej hry (P, v).

Príklad 4.17

Odvodíme explicitné výrazy pre Shapleyho hodnoty hráčov v kooperatívnej hre troch hráčov. Zo vzorcov (4.14) a (4.15) určíme

$$h_1(v) = \frac{1}{3}\,v(\{1\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}\,(v(\{1, 3\}) -$$

$$- v(\{3\})] + \frac{1}{3}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})]$$

$$h_2(v) = \frac{1}{3}\,v(\{2\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{2, 3\}) -$$

$$- v(\{3\})] + \frac{1}{3}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\})]$$

$$h_3(v) = \frac{1}{3}\, v(\{3\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{2, 3\}) -$$

$$- v(\{2\})] + \frac{1}{3}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\})]$$

Preskúmajme hru troch hráčov s charakteristickou funkciou

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 2$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 3$$

Podľa vyššie odvodených vzorcov určíme Shapleyho hodnoty hráčov:

$$h_1(v) = \frac{7}{6}, \qquad h_2(v) = \frac{4}{6}, \qquad h_3(v) = \frac{7}{6}$$

Pokúsme sa intuitívne interpretovať pojem Shapleyho hodnoty kooperatívnej hry. Veličina

$$v(S) - v(S - \{p\})$$

zo vzorca (4.14) udáva prínos p-tého hráča koalícii S. Ukážeme jeden z možných spôsobov interpretácie veličiny $Q(S)$.

Predpokladajme, že v hre troch hráčov „veľká koalícia" všetkých hráčov vzniká postupným spájaním jednotlivých hráčov (jedného, dvoch a troch), pričom každý spôsob takéhoto vzniku „veľkej koalície" je rovnako pravdepodobný. Máme teda šesť možností vzniku „veľkej koalície":

1, 2, 3
2, 3, 1
3, 1, 2
3, 2, 1
2, 1, 3
1, 3, 2

každý s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$.

V dvoch z týchto prípadov je prvý hráč prvým členom vznikajúcej koalície. Jeho prínos predstavuje veličinu

$$v(\{1\}) - v(\emptyset)$$

teda s pravdepodobnosťou 1/3 môže očakávať platbu $v(\{1\})$ (v príklade 4.17 platbu 0).

V jednom z prípadov sa prvý hráč podieľa na vzniku veľkej koalície tak, že sa pripojí k druhému hráčovi, t. j. je druhým v postupnosti formovania veľkej koalície po druhom hráčovi. S pravdepodobnosťou 1/6 môže teda očakávať sumu, ktorá sa rovná jeho prínosu koalícii, t. j.

$$v(\{1, 2\}) - v(\{2\})$$

(v príklade 4.17 platbu 2). Analogicky v jednom z možných prípadov je druhým členom postupnosti hráčov utvárajúcich veľkú koalíciu po treťom hráčovi, a teda s pravdepodobnosťou 1/6 môže očakávať sumu

$$v(\{1, 3\}) - v(\{3\})$$

(v príklade 4.17 platbu 3).

V dvoch prípadoch je prvý hráč posledným členom postupnosti hráčov pri utváraní veľkej koalície, a teda s pravdepodobnosťou 1/3 môže očakávať sumu

$$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})$$

(v príklade 4.17 platbu 1).

Veličiny $Q(S)$ predstavujú teda pravdepodobnosti príslušných spôsobov utvárania veľkej koalície hráčov. Shapleyho hodnota p-tého hráča predstavuje strednú hodnotu prínosu tohto hráča koalícii všetkých hráčov pri všetkých možných spôsoboch utvárania veľkej koalície. Charakterizuje v určitom zmysle jeho „silu" z hľadiska možností spolupráce s ostatnými hráčmi.

Poznámka 4.14

Pojmy riešenia kooperatívnych hier, opísané v predchádzajúcich odsekoch, nevyčerpávajú všetky existujúce prístupy.

Jedným smerom rozvoja kooperatívnej teórie hier je analýza riešení za predpokladu, že množina prípustných koaličných štruktúr neobsahuje všetky mysliteľné koaličné štruktúry.

Niektorí autori analyzujú kooperatívne hry, v ktorých sa upúšťa od predpokladu prenosnosti platieb. V hrách s neprenosnými platbami je predmetom koaličnej spolupráce iba koordinácia voľby stratégií, otázka rozdeľovania úhrnnej platby koalície odpadá.

Ďalším smerom rozvoja kooperatívnej teórie hier je zdokonaľovanie pojmu charakteristickej funkcie. W. Lukas a L. Thrall zovšeobecnili charakteristickú funkciu kooperatívnej hry tak, aby vyjadrovala závislosť platby koalície nielen od jej zloženia a veľkosti, ale aj od existujúcej koaličnej štruktúry, t. j. od rozdelenia ostatných hráčov do rôznych koalícií.

Novátorským a netradičným spôsobom k samotnému pojmu koaličnej štruktúry pristupuje N. N. Vorobjev, ktorý skúma optimálne rozhodovanie v prípade konfliktných situácií, v ktorých môžu byť tí istí hráči zároveň členmi viacerých koalícií (koaličné štruktúry nemusia byť disjunktné).

4.4 APLIKÁCIE HIER n HRÁČOV

Uveďme charakteristický príklad ekonomickej aplikácie modelov nekooperatívnej teórie hier n hráčov.

Jedným z ekonomických rozhodovacích problémov je stanoviť také objemy výroby v rámci odvetvia a stanoviť takú cenu produkcie odvetvia, ktoré zabezpečujú rovnováhu medzi úhrnnou ponukou odvetvia a úhrnným spotrebiteľským dopytom v podmienkach prispôsobujúcich sa cien, pričom každý podnik odvetvia realizuje pri daných cenách a danom rozdelení objemov výroby maximálny zisk. Sformulujeme zjednodušený model tohto rozhodovacieho problému ako hru n hráčov.

Označme $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ množinu podnikov skúmaného odvetvia, x_p objem výroby p-tého podniku, L_p nákladovú funkciu p-tého podniku, d_p maximálnu výrobnú kapacitu p-tého podniku a f funkciu vyjadrujúcu závislosť medzi úhrnnou ponukou a rovnovážnou cenou produkcie odvetvia. Predpokladajme, že f je konvexná klesajúca funkcia úhrnnej ponuky

$$t = \sum_{p=1}^{n} x_p$$

a L_p sú konkávne rastúce funkcie príslušných objemov výroby x_p. Predpokladajme ďalej, že funkcie f a L_p sú aspoň dvakrát spojite diferencovateľné. Preskúmame nasledujúcu hru n hráčov:

Každý hráč (podnik) maximalizuje svoju platbu (zisk)

$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_p\, f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - L_p(x_p) \tag{4.16}$$

na množine stratégií

$$X_p = \{x_p \in E_1,\ 0 \leqq x_p \leqq d_p\} \tag{4.17}$$

Ak sú splnené predpoklady o funkciách f a L_p, potom hry (4.16) a (4.17) majú podľa vety 4.1 aspoň jeden rovnovážny bod.

Osobitne jednoduchý prípad uvedenej hry dostaneme vtedy, keď funkcie f a L_p sú lineárne, t.j.

$$f(t) = a_0 - at$$

$$L_p(x_p) = c_p x_p + b_p$$

kde a_0, a, c_p, b_p sú nezáporné konštanty. Potom skúmame hru n hráčov s množinami stratégií (4.17) a s funkciami platieb

$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[-a\sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 - c_p\right]x_p - b_p \tag{4.18}$$

Vidíme, že funkcia (4.18) je kvadratická. Vhodnou aplikáciou Kuhnových—Tuckerových podmienok pre rovnovážne body v hre (4.18) a (4.17) dostaneme sústavu:

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} + a_0 - c &\leqq 0 \\ \boldsymbol{d} - \boldsymbol{x} &\geqq 0 \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} &\geqq 0 \\ x^T(-\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} + a_0 - c) &= 0 \\ \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a & a & \ldots & a \\ a & 2a & \ldots & a \\ \vdots & & & \\ a & a & \ldots & 2a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_0 = (a_0, a_0, \ldots, a_0)^T$$

$$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

Podmienky (4.19) sú v tomto prípade postačujúcimi podmienkami pre rovnovážne body. Keďže každá funkcia (4.18) je rýdzo konkávna podľa x_p pre všetky $x_i \in X_i$, $i \neq p$, hra (4.18) a (4.19) má jediný rovnovážny bod. Sústavu (4.19) môžeme vyriešiť (a tým aj nájsť rovnovážny bod) napr. Lemkeho metódou kvadratického programovania.

Ďalším typickým príkladom konfliktnej situácie s ekonomickou interpretáciou, ktorú možno modelovať pomocou nekooperatívnej hry n hráčov, je problém optimálneho rozdelenia prostriedkov na propagáciu a rozvoj služieb na zahraničných trhoch.

Nech $p = 1, 2, \ldots, n$ sú konkurujúce firmy a $i = 1, 2, \ldots, m$ sú krajiny, v ktorých tieto firmy súťažia o získanie objednávok. Označme

- s_i — úhrnný objem objednávok v i-tej krajine,
- a_{pi} — prostriedky vynaložené v minulosti p-tou firmou v i-tej krajine,
- b_p — sumu prostriedkov, ktoré môže p-tá firma vynaložiť na propagáciu a rozvoj služieb v skúmanom období,
- x_{pi} — premennú charakterizujúcu prostriedky vynaložené p-tou firmou v i-tej krajine v skúmanom období.

Predpokladáme, že

$$a_{pi} > 0 \tag{4.20}$$

pre všetky $p = 1, 2, \ldots, n$ a $i = 1, 2, \ldots, m$, t.j. každá firma už v minulosti investovala vo všetkých krajinách.

V i-tej krajine získa p-tá firma takú časť z úhrnného objemu objednávok, ktorá je úmerná podielu sumy prostriedkov vynaložených touto firmou v i-tej krajine v minulých obdobiach a v skúmanom období k sume všetkých prostriedkov vynaložených na tomto trhu všetkými konkurujúcimi firmami. Každá firma hľadá takú stratégiu rozdelenia nákladov na propagáciu

$$\boldsymbol{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pm})$$

ktorá jej zabezpečí čo najväčšiu sumu objednávok zo všetkých krajín.

Uvedený problém môžeme formulovať ako hru n hráčov s množinami stratégií hráčov

$$X_p = \left\{ \boldsymbol{x}_p \in E_m, \sum_{i=1}^{m} x_{pi} \leqq b_p, x_{pi} \geqq 0 \right\} \tag{4.21}$$

a funkciami platieb

$$M_p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{pi} + a_{pi}) s_i}{\sum_{k=1}^{n} (x_{ki} + a_{ki})} \tag{4.22}$$

Všetky množiny X_p sú zrejme konvexné a kompaktné. Pre každé $p = 1, 2, \ldots, n$ môžeme funkciu

$$M_p(\boldsymbol{x}) = M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zapísať ako súčet funkcií

$$f_{pi}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}) = \frac{(x_{pi} + a_{pi}) s_i}{\sum_{k=1}^{n} (x_{ki} + a_{ki})} \tag{4.23}$$

ktoré sú vzhľadom na x_{pi} funkciami jednej premennej. Ľahko sa presvedčíme o tom, že za predpokladu (4.20) sú funkcie (4.23) všade spojité, teda aj funkcie (4.20) sú všade spojité. Keďže

$$\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial x_{pi}^2} = - \frac{2 s_i \sum_{k \neq p} (x_{ki} + a_{ki})}{\left(\sum_{k=1}^{n} (x_{ki} + a_{ki}) \right)^3} < 0$$

pre $s_i > 0$, $x_{ki} \geq 0$, $a_{ki} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ je funkcia f_{pi} rýdzo konkávna vzhľadom na x_{pi} pre všetky nezáporné $x_{1i}, \ldots, x_{p-1,i}, x_{p+1,i}, \ldots, x_{ni}$. Z toho vyplýva, že každá funkcia

$$M_p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{pi}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$$

je rýdzo konkávna podľa $x_p \in X_p$ pre všetky $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \in X_1 \times \times X_2 \times \ldots \times X_{p-1} \times X_{p+1} \times \ldots \times X_n$.

Ukázali sme, že pre skúmanú hru sú splnené predpoklady vety 4.3, hra (4.22) a (4.21) má teda za predpokladu (4.20) jediný rovnovážny bod, ktorý môžeme hľadať s využitím poznatkov teórie nelineárneho programovania. Ak konkurujúce firmy neuzatvárajú dohody o deľbe trhov, t. j. ak skúmaná hra je nekooperatívna, tak optimálnou stratégiou každej firmy bude jej rovnovážna stratégia z jediného rovnovážneho bodu.

Obidva uvedené modely možno skúmať aj ako kooperatívne hry s tým, že pripustíme možnosť záväzných dohôd (o objemoch výroby v prvom prípade a deľbe trhov v druhom prípade). Z modelu hry v normálnom tvare potom treba v súlade s poznatkami zo stati 4.3.2 odvodiť charakteristickú funkciu a pokúsiť sa o aplikáciu napr. C jadra alebo N jadra pri určovaní optimálnych dohôd.

5 MODELY ROZHODOVANIA ZA RIZIKA A NEURČITOSTI

Spomedzi modelov konfliktných rozhodovacích situácií možno vyčleniť jednu triedu — modely rozhodovania za rizika a neurčitosti. V tejto kapitole opíšeme len modely konfliktných rozhodovacích situácií s jedným racionálnym a jedným indiferentným účastníkom. Najprv preskúmame modely rozhodovania za rizika a neurčitosti ako hry proti prírode, ako aj základné princípy ich riešenia. Ďalej opíšeme hry s ohraničeniami a ukážeme, že ich riešenie je ekvivalentné riešeniu zodpovedajúcemu úlohe matematického programovania. V závere preskúmame modely s p racionálnymi účastníkmi a uvedieme prehľad aplikácií modelov rozhodovania za rizika a neurčitosti.

5.1 ROZHODOVANIE ZA RIZIKA A NEURČITOSTI

Konfliktné rozhodovacie situácie s jedným racionálnym a jedným indiferentným účastníkom a s vektorovým ohodnotením výsledkov rozhodovania sa v praxi často vyskytujú. Všeobecný model takejto rozhodovacej situácie sme opísali v prvej kapitole.

Výsledky mnohých ekonomických rozhodnutí často závisia od faktorov, pri ktorých vopred nevieme určiť, do akej miery budú pôsobiť. Možno predpokladať, že ich pôsobenie nie je cieľavedomo regulované. Takýto náhodný vplyv faktorov na efektívnosť činnosti nazývame pôsobením prírody alebo stavom prírody. Nie je núdza o rozhodovacie situácie, ktoré zahŕňajú pôsobenie takýchto faktorov. Podobné situácie často vznikajú napríklad v investičnej politike, kde ide o tzv. stratégiu investora, t. j. o rozhodnutie investora, kedy a kde stavať za predpokladu, že dôsledky takéhoto rozhodnutia sú z ekonomického alebo ekologického hľadiska rizikové alebo neurčité. Takýto charakter majú aj mnohé rozhodnutia v odvetviach, ktoré závisia od prírodných podmienok (poľnohospodárstvo, ťažobný priemysel a pod.). S rozhodovaním za rizika a neurčitosti sa stretávame aj v mnohých iných situáciách ekonomickej praxe, napr. pri plánovaní opráv.

Niektoré problémy spojené s rozhodovaním za rizika a neurčitosti naznačíme v nasledujúcom príklade.

Príklad 5.1

Podnik má tri stroje ako nadnormatívne zásoby. Má možnosť predať ich s ročnou záručnou lehotou, pričom za jeden dostane 6 000,— Kčs. Ak sa však v prevádzke počas záruky ukáže, že stroj bol chybný, musí podnik zaplatiť kupujúcemu pokutu 9 000,— Kčs.

Podnik sa môže rozhodnúť, že nepredá ani jeden stroj, predá jeden, dva alebo všetky tri stroje. Tieto alternatívy potom predstavujú stratégie racionálneho účastníka tejto rozhodovacej situácie. Označíme ich ako 0, 1, 2, 3. Z hľadiska indiferentného účastníka môžu nastať tieto prípady. Počas záruky budú všetky stroje pracovať spoľahlivo, alebo sa ukáže, že jeden, dva alebo všetky tri stroje budú chybné. Za predpokladu, že podnik nemá nijakú informáciu o spoľahlivosti strojov, môžeme platby (v tisícoch), ktoré získa predajom daného počtu strojov pri zodpovedajúcom počte chybných strojov zapísať v *tab. 5.1*. Poznamenávame, že čísla v 2. a 3. riadku a 2. a 3. stĺpci sú určené ako stredné hodnoty $\left(\text{napr. číslo 6 v 3. riadku a 2. stĺpci určíme takto: } 12 - \frac{1}{3} 18 = 6\right)$. Úvahy o racionálnom rozhodovaní v skúmanej situácii opíšeme neskôr.

Tabuľka 5.1

Počet predaných strojov \ Počet chybných strojov	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	6	3	0	−3
2	12	6	0	−6
3	18	9	0	−9

Problémy rozhodovania za rizika a neurčitosti skúmame ďalej z hľadiska teórie hier. Hlavné princípy ich riešenia budeme analyzovať na hrách proti prírode a hrách s ohraničeniami. Najprv však preskúmame problémy voľby riešenia (rozhodovania) všeobecnejšie. Pre hlbšie štúdium teórie rozhodovania je však potrebné oboznámiť sa so základnými pojmami teórie užitočnosti. Vzhľadom na ohraničenosť rozsahu tejto práce nemôžeme venovať pozornosť problémom teórie užitočnosti. Čitateľ, ktorý chce hlbšie skúmať tieto problémy, môže nájsť základné poznatky z teórie užitočnosti v domácej literatúre napr. v [33] a [42] a podrobnejšie v zahraničnej literatúre, napr. [18].

Úloha rozhodovania alebo voľby riešenia bola pôvodne zavedená v teórii štatistického rozhodovania (pozri [71]). V rozhodovacej situácii racionálny účastník volí niektorú alternatívu z daného súboru alternatív $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Predpokladá sa, že porovnateľná efektívnosť (užitočnosť), ktorá z tejto voľby vyplýva, závisí od toho, aký stav prírody $y_1, y_2, \ldots, y_n$ môže nastať. Každá dvojica (x_i, y_j) predstavuje niektorý výsledok takého rozhodovania. Predpokladajme, že tieto výsledky možno usporiadať podľa ich preferencií z hľadiska racionálneho účastníka a vyjadriť pomocou funkcie užitočnosti (pozri [33]). Takúto rozhodovaciu situáciu môžeme upraviť na zodpovedajúcu maticovú hru s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je užitočnosť spojená s dvojicou (x_i, y_j).

Úlohy rozhodovania však nemožno analyzovať všeobecne. Výhodnejšie je skúmať špeciálne triedy takých úloh. Tieto úlohy klasifikujeme podľa toho, či sa rozhodovanie uskutočňuje za

a) určitosti,
b) rizika,
c) neurčitosti.

V literatúre sa tieto úlohy rozlišujú aj podľa toho, či sa rozhoduje jednotlivec alebo kolektív (skupina). Jednotlivec môže zastupovať aj kolektív, ktorý má jednotný záujem. Skupina tvorí súhrn jednotlivcov, ktorých protikladnosť záujmov môže vyústiť do konfliktu alebo do určitej dohody medzi nimi.

a) Rozhodovanie za určitosti. V tomto prípade voľba každej alternatívy x_i vedie k niektorému konkrétnemu výsledku, ktorý s určitosťou nastane. Úlohou rozhodovania za určitosti potom je voľba takého variantu, ktorý zabezpečí maximum alebo minimum niektorej vopred určenej charakteristiky alebo ukazovateľa. Nech x_i je ľubovoľný variant z množiny variantov X a $f(x_i)$ je ukazovateľ efektívnosti (kvality) spojený s voľbou variantu x_i. Matematicky túto úlohu môžeme formulovať takto: Treba voliť taký variant $x_i \in X$, že

$$f(x_i) = \max_{x_i \in X} f(x_i)$$

alebo

$$f(x_i) = \min_{x_i \in X} f(x_i)$$

Tieto úlohy sa často vyskytujú v ekonomike. Vtedy ukazovateľ efektívnosti nadobúda konkrétnu formu, napr. zisk, objem výroby, náklady na výrobu. Poznamenávame, že aj deterministické modely matematického programovania, ktoré sa dnes široko využívajú v priemyselnom riadení a plánovaní, sú vlastne úlohy rozhodovania za určitosti. Rozvoj metód matematického programovania umožnil podstatný krok vpred pri riešení úloh tohto typu. Na druhej strane je zrejmé, že tieto úlohy nemožno často úspešne aplikovať v praxi, pretože neúplne charakterizujú skúmanú skutočnosť. Len v málo prípadoch môžeme o jednotlivých faktoroch vstupujúcich do úlohy povedať s určitosťou, ako budú pôsobiť.[1]

[1] Aj v úlohe rozhodovania za určitosti vznikajú problémy vtedy, keď sa ťažko dá určiť ukazovateľ efektívnosti (kvality) spojený s voľbou daného variantu, napr. pri rozhodovaní o kúpe niektorých tovarov z daného súboru, ktoré sa neodlišujú cenou, ale niektorými vlastnosťami, farbou, tvarom a pod. Rozhodovanie v takýchto prípadoch má subjektívny charakter a musí sa skúmať z tohto hľadiska.

b) Rozhodovanie za rizika. V tomto prípade voľba niektorého variantu racionálnym účastníkom vedie ku konkrétnemu výsledku, ktorý závisí od voľby alternatívy indiferentným účastníkom (od stavu prírody). Predpokladá sa, že indiferentný účastník volí svoje alternatívy podľa niektorého pravdepodobnostného rozdelenia, ktoré je známe. Inými slovami, pre stavy prírody $y_1, y_2, \ldots, y_n$ poznáme čísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (p_i sú nezáporné a ich súčet sa rovná 1). Potom p_i označuje pravdepodobnosť, s ktorou indiferentný účastník volí svoj i-tý variant. Zrejmé je, že ak p_i sa rovnajú len 0 alebo len 1, nastáva prípad rozhodovania za určitosti. Racionálny účastník musí pri výbere svojich variantov skúmať priemerné výsledky, ku ktorým tieto voľby vedú. Jeho rozhodovacia úloha bude vo voľbe takého variantu, ktorý mu zaručuje maximálny priemerný výsledok. O rozhodovaní za rizika možno hovoriť aj vtedy, keď síce nepoznáme pravdepodobnostné rozdelenie na množine stavov prírody, ale máme určitú informáciu o tomto rozdelení (napr. poznáme intervaly, v ktorých sa nachádzajú jednotlivé pravdepodobnosti).

c) Rozhodovanie za neurčitosti. V tomto prípade voľba variantu racionálnym účastníkom vedie k množine možných výsledkov, ktoré závisia od voľby variantu indiferentným účastníkom. Indiferentný účastník volí svoje varianty podľa niektorého pravdepodobnostného rozdelenia, ktoré však nie je známe. Teda pre jednotlivé stavy prírody y_i nie sú známe čísla p_i (pravdepodobnosti, s ktorými indiferentný účastník volí svoje varianty). V tomto je podstata neurčitosti správania indiferentného účastníka. Rozhodovacia úloha racionálneho účastníka je teda vo výbere takého variantu, ktorý mu zaručí maximálny priemerný výsledok za týchto predpokladov. Zrejmé je, že to nie je jednoduchá úloha. Jej riešenie je však aktuálne, pretože takéto úlohy sa často vyskytujú v ekonomickej a riadiacej praxi.

Problémy rozhodovania za rizika a neurčitosti sú v literatúre podrobnejšie a všeobecnejšie preskúmané napr. v [27] a [41]. V tejto kapitole na riešenie úloh rozhodovania za rizika a neurčitosti použijeme princípy riešenia hier proti prírode a hier s ohraničeniami.[1]

5.2 HRY PROTI PRÍRODE A PRINCÍPY ICH RIEŠENIA

Hry proti prírode sú dôležitou triedou teórie hier tak z aplikačného, ako aj z teoretického hľadiska.

[1] Úlohy rozhodovania za rizika a neurčitosti možno skúmať aj pomocou iných nástrojov ako je teória hier. Napríklad na ich riešenie možno použiť metódy matematického programovania, ako aj programovanie za neurčitosti alebo programovanie s pravdepodobnostnými ohraničeniami (pozri [13] a [26]).

Definícia 5.1

Hrou proti prírode nazveme hru dvoch hráčov s nulovým súčtom platieb, v ktorej prvý hráč je racionálny (teda usiluje sa maximalizovať svoju výhru) a druhý hráč je indiferentný k výsledkom hry. Druhého hráča nazveme prírodou.

Na rozdiel od maticových hier, kde sa predpokladalo, že obaja hráči sú racionálni, v hrách proti prírode sa to predpokladá len o prvom hráčovi. Druhý hráč (príroda) je alebo niektorý neinteligentný systém, alebo sa správa ako neinteligentný systém, t. j. je ľahostajný k výsledkom hry a neusiluje sa teda získať v tejto hre čo najviac (stratiť čo najmenej).[1]

Zrejmé je, že v praxi existuje veľa situácií, ktoré môžeme modelovať ako hry proti prírode. Hry proti prírode nachádzajú široké možnosti aplikácií v ekonomike, v sociológii, vo vojenských vedách a v iných oblastiach. Tu vznikajú často situácie, v ktorých pôsobia faktory, o ktorých vopred nevieme povedať, do akej miery budú pôsobiť, alebo či sa vôbec vyskytnú. Preto môžeme predpokladať, že pôsobenie alebo výskyt týchto faktorov sa nereguluje cieľavedomo. Také situácie môžeme preto skúmať ako hry proti prírode a uvedené faktory môžeme považovať za stratégie alebo stavy prírody. Poznamenávame, že existuje zjavná podobnosť medzi úlohami rozhodovania za rizika a neurčitosti a hrami proti prírode. Preto aj rozhodovacie situácie, ktoré sme opísali v predchádzajúcej časti, môžeme skúmať ako hry proti prírode. V tomto zmysle aj príklad 5.1 predstavuje hru proti prírode. K jeho analýze sa vrátime neskôr.

Príklad 5.2

Valcovne rúr používajú na výrobu bezšvových rúr tri typy základného materiálu — oceľové tyče. Tieto sa len nepatrne odlišujú svojím chemickým zložením. Podmienky nákupu materiálu neumožňujú objednať iba jeden typ. Materiál teda prichádza do skladov bez roztriedenia a jedna dodávka môže obsahovať tyče rozličných druhov. Triedenie tyčí by bolo neefektívne. Pri výrobe rúr môžu valcovne používať štyri rôzne technologické postupy. Tieto postupy nie sú rovnako výhodné (z hľadiska nákladov na výrobu) na spracovanie základného materiálu s rôznym chemickým zložením.

Valcovne sa musia rozhodnúť pre taký technologický postup, ktorý zaručí minimálne náklady na výrobu rúr aj za predpokladu, že množstvá jednotlivých druhov základného materiálu nie sú známe. Náklady na jednotku výroby pri jednotlivých technologických postupoch a zodpovedajúcich typoch materiálu sú uvedené v *tab. 5.2*.

Túto situáciu môžeme formulovať ako hru proti prírode s maticou platieb

[1] Hry proti prírode sa v literatúre nazývajú aj neantagonistické maticové hry.

Tabuľka 5.2

Technologické postupy	Typ materiálu		
	I	II	III
A	2	3	2,5
B	2	2,5	1,5
C	3	2	2,5
D	2	2	1,5

uvedenou v *tab. 5.2*. Prvým hráčom budú valcovne rúr. Tento hráč má štyri čisté stratégie (technologické postupy výroby), a jeho cieľom bude minimalizovať náklady na výrobu. Druhým hráčom bude príroda, a jej stratégie (stavy) reprezentujú dodávky rôznych typov materiálu.

Príroda volí svoje stratégie (stavy) podľa niektorého pravdepodobnostného rozdelenia na množine svojich stratégií, pričom toto pravdepodobnostné rozdelenie je, alebo nie je známe. Potom za predpokladu rizika a neurčitosti v správaní prírody vzniká otázka, akými princípmi rozhodovania sa bude riadiť prvý hráč v tejto hre.

Poznamenávame, že ani v maticových hrách prvý hráč nevie, akú stratégiu volí jeho protivník. Keďže aj druhý hráč je racionálny, prvý hráč sa môže zabezpečiť proti neurčitosti v jeho správaní iba vtedy, keď sa pri voľbe svojich stratégií riadi minmaxovým princípom. Od tohto princípu môže ustúpiť napr. vtedy, ak pozná tendencie alebo zvyky v hre svojho protivníka.

5.2.1 Bayesov princíp

Analyzujme teraz hry v prírode z hľadiska prvého hráča. Najprv predpokladajme, že vzniká preňho situácia rozhodovania za rizika. V tomto prípade prvý hráč pozná pravdepodobnostné rozdelenie, podľa ktorého príroda volí svoje stratégie (nastávajú stavy prírody).

Nech je daná hra proti prírode s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$. Potom prvý hráč vie, že príroda volí svoju j-tú čistú stratégiu s pravdepodobnosťou p_j. Optimálna stratégia prvého hráča bude taká čistá stratégia, ktorá maximalizuje jeho strednú hodnotu platby

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

Poznámka 5.1

Použijúc označenia druhej kapitoly to znamená, že ak je známa zmiešaná stratégia druhého hráča $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, prvý hráč bude voliť takú čistú stratégiu i_0, že

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} y_j = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

Ak prvý hráč pri rozhodovaní za rizika postupuje takto, hovoríme, že sa riadi Bayesovým princípom.

V praktických aplikáciách sa zvyčajne predpokladá, že prvý hráč môže určiť pravdepodobnostné rozdelenie, podľa ktorého príroda volí svoje stratégie, na základe predchádzajúcej skúsenosti (napr. zo štatistického skúmania). Vzniká otázka, nakoľko je uvedený Bayesov princíp vhodný na riešenie hier proti prírode. Hlavné nedostatky tohto princípu vyplývajú z výhrad proti reálnosti predpokladanej hypotézy o správaní prírody. Zrejmé je, že to, či je, alebo nie je vhodné použiť Bayesov princíp, závisí od konkrétnej skúmanej situácie, pričom treba zvážiť aj veľkosť rizika spojeného s jeho použitím. Podrobnejšiu diskusiu o tomto a iných problémoch použitia Bayesovho princípu možno nájsť v [41].

Niektoré myšlienky, ako odstrániť nedostatky Bayesovho princípu, opíšeme aj v stati 5.3. Ďalšie sú spojené s využitím poznatkov teórie užitočnosti (pozri [18]).

Prejdime teraz k analýze hier proti prírode v prípade, keď sa prvý hráč musí rozhodovať v podmienkach neurčitosti. Vtedy vznikajú ťažkosti s definovaním optimálnej stratégie prvého hráča. V literatúre bolo navrhnutých niekoľko princípov, podľa ktorých by sa mal prvý hráč riadiť pri rozhodovaní za neurčitosti. Ukážeme, že ani jeden z nich nemožno považovať jednoznačne za najlepší. Preskúmame najznámejšie z týchto princípov.

5.2.2 Minmaxový princíp

Tento princíp poznáme z konečných hier dvoch hráčov (maticových hier). Preto uvedieme len niekoľko poznámok o tomto princípe v súvislosti s jeho použitím v hrách proti prírode.

Zrejmé je, že prvý hráč sa v hre proti prírode bude riadiť minmaxovým princípom iba vtedy, keď sa chce zabezpečiť proti najhoršiemu možnému stavu prírody, ktorý môže nastať. V takom prípade prvý hráč použije pri rozhodovaní svoju maxminovú stratégiu, ktorá mu zabezpečí najlepší výsledok za predpokladu, že príroda volí svoju minmaxovú stratégiu.

Vzniká otázka, či je vhodné pre prvého hráča riadiť sa princípom minmaxu pri rozhodovaní za neurčitosti. Ukazuje sa, že ak sa všeobecne riadi týmto princípom, potom postupuje príliš opatrne — až pesimisticky. Preto je takýto postup správny iba vtedy, keď má pesimizmus zmysel. Túto úvahu objasníme na nasledujúcom príklade.

Príklad 5.3

Zranenie pacienta si vyžaduje okamžitú operáciu. Chirurg pritom nepozná jeho zdravotný stav a pre časovú tieseň ho nemôže ani zistiť. Chirurg môže použiť jeden z dvoch možných spôsobov operácie, ktoré označíme I a II. Každý z nich zaručuje odlišnú úspešnosť operácie v závislosti od zdravotného stavu pacienta, ktorý označíme ako A a B. Pravdepodobnosti úspechu operácie v závislosti od použitého spôsobu operácie a zdravotného stavu pacienta sú uvedené v *tab. 5.3*, ktorá súčasne predstavuje aj maticu platieb hry proti prírode.

Tabuľka 5.3

	A	B
I	0,7	0,5
II	0,8	0

Pri rozhodovaní chirurga v tejto situácii bude namieste opatrnosť, z ktorej vyplýva oprávnenosť použitia minmaxového princípu. Preto chirurg volí svoju maxminovú stratégiu, aby sa zabezpečil aj proti najhoršiemu možnému stavu prírody, pretože riziko z použitia druhej stratégie (spôsobu operácie II) je veľmi veľké (smrť pacienta). Teda chirurg sa rozhodne použiť prvý spôsob operácie (I), ktorý v najhoršom prípade zaručuje jej polovičný úspech.

Všeobecne však použitie minmaxového princípu rozhodovania v hrách proti prírode nemusí byť opodstatnené. Keďže správanie prírody je neurčité a nie je cieľavedomé, prvý hráč nemá dôvody uvažovať o správaní prírody z hľadiska absolútneho pesimizmu.

Príklad 5.4

Nech hra proti prírode je daná maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

Pretože táto matica platieb obsahuje sedlový bod (prvok 0,01), podľa minmaxového princípu bude prvý hráč vždy voliť svoju druhú stratégiu. Avšak už jednoduchá logická analýza vzbudzuje podozrenie o oprávnenosti voľby tejto stratégie prvým hráčom.[1] Prvý hráč by bol oprávnený voliť svoju druhú stratégiu iba vtedy, keď aj druhý hráč by bol racionálnym hráčom.

[1] Toto podozrenie sa ešte zväčší, ak uvážime skutočnosť, že podľa tohto princípu by prvý hráč volil svoju druhú stratégiu aj za predpokladu, že platby v druhom riadku by boli nižšie (blížili by sa nule) a súčasne platba 100 (v prvom riadku) by sa zväčšovala.

Poznámka 5.2

V niektorých situáciách sa prvý hráč môže riadiť aj podľa maxmaxového princípu. Pri jeho použití bude potom prvý hráč voliť takú stratégiu, ktorá mu zabezpečuje najlepší možný výsledok.

5.2.3 Savageov princíp minmaxu straty

Máme hru proti prírode s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Podstata Savageovho princípu spočíva v tom, že minmaxový princíp sa aplikuje na odlišnú maticu platieb, ako je matica $\mathbf{A}$. Túto, tzv. maticu strát určíme takto: Označme

$$\bar{a}_j = \max_i a_{ij}, \qquad \text{pre všetky } j$$

Potom maticu strát s prvkami s_{ij} definujeme takto:

$$s_{ij} = a_{ij} - \bar{a}_j$$

Podľa Savageovho princípu optimálne rozhodnutie prvého hráča ho ochráni pred veľkými stratami v porovnaní s rozhodnutím, ktoré by uskutočnil, ak by poznal stratégie prírody. Teda optimálnou stratégiou prvého hráča bude taká jeho čistá stratégia, ktorá maximalizuje riadkové minimá matice strát.

Na lepšie objasnenie analyzujeme hru z príkladu 5.4 z hľadiska tohto princípu. Zodpovedajúca matica strát bude

$$\begin{pmatrix} -0{,}01 & 0 \\ 0 & -99{,}98 \end{pmatrix}$$

Ak príroda volí svoju prvú stratégiu, tak pre prvého hráča neexistuje nijaké riziko straty, ak volí svoju druhú stratégiu. Ak však volí svoju prvú stratégiu, predsa len určité riziko straty existuje. Na druhej strane, ak príroda volí druhú stratégiu, tak v prípade, že prvý hráč volí prvú stratégiu, jeho strata bude nulová, ale ak volí druhú stratégiu, jeho strata bude veľká. Všimnime si, že na rozdiel od pôvodnej matice platieb (príklad 5.4) matica strát už neobsahuje sedlový bod.

Poznámka 5.3

Princíp minmaxu sa zachováva rovnako ako v pôvodnej matici platieb. Vyplýva to z toho (pozri druhú kapitolu), že pripočítanie alebo odpočítanie konštanty k ľubovoľnému stĺpcu matice platieb nemení poriadok preferencií jednotlivých stratégií.

Ak sa prvý hráč riadi Savageovým princípom, tak pre každý stav prírody určuje stratu z voľby danej stratégie vo vzťahu k ľubovoľnej inej stratégii. Potom z dvoch stratégií volí takú, ktorá dáva menšiu minimálnu stratu. Optimálnou stratégiou bude taká, ktorú preferuje pred ľubovoľnou inou stratégiou. Môže

však nastať prípad (napr. ak niektorú stratégiu nemôže použiť), keď preferencie jeho stratégií nezachovávajú tranzitívnosť. Potom Savageov princíp nevedie k jednoznačnému riešeniu. Existujú aj iné námietky proti použitiu tohto princípu. Tieto sú spojené s teóriou užitočnosti[1] (pozri napr. [18]).

5.2.4 Hurwiczov princíp ukazovateľa optimizmu a pesimizmu

Predchádzajúce dva princípy rozhodovania za neurčitosti — minmaxový princíp, ako aj Savageov princíp — môžeme považovať za pesimistické v tom zmysle, že pripravujú racionálneho účastníka hry na najhorší možný prípad stavu prírody. Hurwicz preto vzal do úvahy nielen najhorší možný stav prírody, ale aj jej najlepší možný stav a vytvoril z nich kombináciu.

Opíšeme v krátkosti tento princíp. Nech je daná hra proti prírode s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Pre každú čistú stratégiu (i-tý riadok matice) prvý hráč určí veličiny

$$m_i = \min_j a_{ij}$$

$$M_i = \max_j a_{ij}$$

Inými slovami, určí minimálny a maximálny prvok v každom riadku matice platieb.

Predpokladajme, že prvý hráč volí číslo $\alpha \in [0, 1]$, ktoré sa nazýva ukazovateľ optimizmu a pesimizmu. Podľa Hurwiczovho princípu optimálnou stratégiou prvého hráča bude taká jeho čistá stratégia, pre ktorú je veličina

$$\alpha m_i + (1 - \alpha) M_i$$

maximálna.

Z konštrukcie ukazovateľa optimizmu a pesimizmu vyplýva, že ak $\alpha = 1$, potom je to prípad extrémneho pesimizmu, a preto prvý hráč považuje za optimálnu svoju maxminovú stratégiu. Naopak, ak $\alpha = 0$, potom je to prípad extrémneho optimizmu, a teda optimálnou bude maxmaxová stratégia.

Hlavný problém pri použití Hurwiczovho princípu pri rozhodovaní za neurčitosti je v nájdení správneho ukazovateľa optimizmu a pesimizmu. Pre odstránenie subjektivizmu pri určovaní tohto ukazovateľa bolo navrhnutých niekoľko prístupov. Navrhuje sa napr. preskúmať pomocou experimentov rozličné hodnoty ukazovateľa α pre konkrétne rozhodovacie úlohy a vybrať takú hodnotu

[1] Nie je jasné, či rozdiely v užitočnosti sú charakteristickou mierou rizika straty. Napríklad nie je jasné, či riziko straty pri prechode od stratégie s užitočnosťou 3 k stratégii s užitočnosťou 1 je ekvivalentné riziku straty pri prechode od stratégie s užitočnosťou 9 k stratégii s užitočnosťou 7.

α, ktorá vedie k najlepším výsledkom. Niekedy môže prvý hráč určiť presnejšie tento ukazovateľ aj na základe predchádzajúcej skúsenosti v hre.

Okrem problémov súvisiacich s určením ukazovateľa optimizmu a pesimizmu boli proti použitiu Hurwiczovho princípu vyslovené aj iné námietky. Objasníme ich na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 5.5

Máme hru proti prírode s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že prvý hráč sa pri rozhodovaní v tejto hre bude riadiť Hurwiczovým princípom. Potom podľa tohto princípu obidve jeho stratégie sú optimálne a nezáleží na tom, ktorú použije. To je spôsobené tým, že veličina $\alpha m_i + (1 - \alpha) M_i$ je pre obidve stratégie rovnaká. Logicky sa však javí druhá stratégia lepšia ako prvá, pretože mu pri štyroch stavoch prírody zaručuje platbu 1, kým prvá stratégia mu zaručí túto platbu len v jednom prípade.

Príklad 5.6

Nech je daná hra proti prírode s maticou platieb

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že prvý hráč sa pri rozhodovaní riadi Hurwiczovým princípom a jeho ukazovateľ optimizmu a pesimizmu je 1/3. Potom veličina $\alpha m_i + (1 - \alpha) M_i$ pre jeho prvé dve stratégie je 5/3 a pre tretiu stratégiu je 1/3.

Z toho vyplýva, že prvé dve stratégie prvého hráča sú optimálne, avšak tretia, ktorá vlastne zodpovedá voľbe prvých dvoch s rovnakou pravdepodobnosťou, nie je optimálna.

5.2.5 Princíp nedostatočnej evidencie

Tento princíp sa nazýva aj princíp racionality Bernoulliho a Laplacea. Nech je daná hra proti prírode s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Prvý hráč sa rozhoduje pre voľbu niektorej stratégie za neurčitosti. Predpokladáme, že prvý hráč nepozná pravdepodobnosti, s ktorými príroda volí svoje stratégie. Podľa tohto princípu ich považuje za rovnocenné, teda voľbu každej stratégie

prírody očakáva s rovnakou pravdepodobnosťou. Ak príroda má n čistých stratégií (stavov), voľbu každej očakáva s pravdepodobnosťou $1/n$. Potom optimálnou stratégiou prvého hráča bude taká čistá stratégia, ktorá mu zabezpečí maximálnu strednú hodnotu platby pri takomto pravdepodobnostnom rozdelení, teda taká i-tá stratégia, pre ktorú je veličina

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

maximálna. Čitateľ ľahko zistí podobnosť tohto princípu rozhodovania s Bayesovým princípom rozhodovania za rizika.

Hoci princíp nedostatočnej evidencie sa zdá intuitívne prijateľný (ak nič nevieme o stavoch prírody, treba ich očakávať s rovnakou pravdepodobnosťou), možno ukázať aj niektoré jeho nedostatky. Jeden z nich bol opísaný v súvislosti s použitím Bayesovho princípu a dotýka sa stupňa reálnosti predpokladanej hypotézy o správaní prírody.

Iné nedostatky vyplývajú z jeho praktického použitia. Zrejmé je, že pri riešení konkrétnej rozhodovacej úlohy treba najprv nájsť všetky možné nezávislé stavy prírody. Tieto však nemožno v niektorých prípadoch určiť, alebo ich možno určiť rozličnými spôsobmi, čo zase vedie k rozdielnym výsledkom. Treba poznamenať, že nedostatky tohto typu sa vzťahujú aj na predchádzajúce princípy. Nedostatky princípu nedostatočnej evidencie sa niektorí autori usilujú odstrániť pomocou axiomatickej teórie užitočnosti alebo pomocou teórie subjektívnej pravdepodobnosti (pozri [18] a [3]).

Poznámka 5.4

Štyri uvedené princípy rozhodovania za neurčitosti môžeme zovšeobecniť na prípad, keď množina stratégií (stavov) prírody je nekonečná (pozri [42]). Okrem týchto princípov rozhodovania za neurčitosti existujú v literatúre aj iné. Podrobnejšie sa touto problematikou zaoberajú napr. [10] a [17].

Vzniká otázka, ktorý z uvedených princípov je najlepší pre prvého hráča. Odpoveď na túto otázku nie je jednoznačná a v prvom rade závisí od charakteru konkrétnej situácie, ktorú skúmame alebo modelujeme ako hru proti prírode. Môžeme ľahko ukázať, že ak pri riešení hry proti prírode prvý hráč použije rôzne princípy, môže získať výsledky, ktoré sa navzájom podstatne odlišujú. Použitie niektorého konkrétneho princípu je zjavne subjektívnou záležitosťou a závisí od charakteru skúmanej úlohy. Preto opísané princípy rozhodovania za rizika a neurčitosti ešte nedávajú návod na optimálne rozhodovanie.

Niekedy sa navrhuje použiť kombináciu viacerých princípov. Potom, ak prvý hráč rieši úlohu rozhodovania za neurčitosti, môžeme použiť kombináciu niekoľkých princípov a ako optimálnu budeme voliť takú stratégiu, ktorá je najlepšia podľa väčšiny skúmaných princípov. Kompromisné riešenie však nemusí nevyhnutne viesť k prijateľnému výsledku.[1] Tieto problémy sa podrobnejšie skúmajú napr. v [41].

Zrekapitulujeme vhodnosť použitia jednotlivých princípov na predchádzajúcich príkladoch.

Ak sa podnik z príkladu 5.1 bude riadiť pri rozhodovaní podľa minmaxového princípu, nepredá ani jeden stroj (prvok 0 v prvom riadku a treťom stĺpci je sedlový bod matice platieb). Podľa Savageovho princípu minmaxu straty sa podnik rozhodne predať dva stroje. Ak sa podnik bude riadiť podľa Hurwiczovho princípu ukazovateľa optimizmu a pesimizmu, potom jeho rozhodnutie bude závisieť od hodnoty tohto ukazovateľa. Napríklad ak $\alpha = 1/4$, optimálna stratégia podniku bude — nepredať ani jeden stroj; ak $\alpha = 3/5$, optimálna stratégia podniku bude — predať všetky tri stroje. Nakoniec podľa princípu nedostatočnej evidencie optimálna stratégia podniku bude — predať všetky stroje.

V príklade 5.2 podľa minmaxového princípu sa podnik rozhodne použiť na výrobu rúr technologický postup D^2. Rovnaký technologický postup použije aj vtedy, keď sa pri voľbe riešenia bude riadiť podľa princípu nedostatočnej evidencie. Podobne môžeme pre tento príklad preskúmať aj použitie iných princípov rozhodovania.

Príklad 5.7

Poľnohospodársky podnik má k dispozícii určité množstvo hektárov pôdy. Na tejto pôde môže pestovať jednu z piatich poľnohospodárskych kultúr. Predpokladajme, že počas vegetácie môže prevládať daždivé, priemerné alebo suché počasie.

Stratégiami podniku budú jednotlivé plodiny, ktoré môže siať (označíme ich I až V) a stratégiami prírody budú jednotlivé druhy počasia (označíme ich A až C). Nech je známy dôchodok z priemerne predpokladanej úrody každej plodiny pri jednotlivých druhoch počasia, ako to ukazujú údaje v *tab. 5.4.* Podnik sa musí rozhodnúť pre sejbu niektorej z plodín tak, aby získal maximálny dôchodok i za predpokladu, že nevie, aké počasie bude prevládať.

Analyzujme túto situáciu z hľadiska predchádzajúcich princípov rozhodovania. Predpokladajme, že podnik sa riadi pri rozhodovaní minmaxovým princípom. Potom na základe vlastnosti dominácie sa jeho matica platieb zredukuje na maticu platieb:

[1] Môže nastať prípad, že pri porovnávaní preferencií stratégií podľa jednotlivých princípov a výberu stratégie, ktorá by bola preferovaná podľa väčšiny z nich, narúša sa vzťah tranzitívnosti (pozri napr. [17]).

[2] Keďže prvky matice platieb predstavujú náklady na výrobu, z hľadiska prvého hráča to budú záporné hodnoty, ktoré bude maximalizovať.

Tabuľka 5.4

Plodina	Dôchodok z priemernej úrody plodín podľa počasia		
	A	*B*	*C*
I	7	12	5
II	15	12	6
III	4	12	16
IV	10	8	6
V	5	12	11

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Optimálna stratégia pre hru s takouto maticou platieb je

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Preto sa podnik rozhodne medzi pestovaním druhej a tretej plodiny na základe náhodného mechanizmu, ktorý dáva takéto pravdepodobnostné rozdelenie (alebo ich bude pestovať obidve v uvedenom pomere). Priemerný dôchodok podniku potom bude 72/7.

Ak sa podnik pri rozhodovaní riadi princípom nedostatočnej evidencie (považuje výskyt každého druhu počasia za rovnako pravdepodobný), bude siať druhú plodinu, pretože jej pestovanie mu zabezpečuje maximálny priemerný dôchodok

$$\max \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} a_{2j} = \frac{15}{3} + \frac{12}{3} + \frac{6}{3} = 11$$

Ak sa podnik riadi podľa Hurwiczovho princípu, jeho rozhodnutie závisí od hodnoty ukazovateľa optimizmu a pesimizmu. Napríklad, ak v podniku prevládajú optimistické názory na počasie a za tento ukazovateľ zvolí číslo 3/4, rozhodne sa pre pestovanie druhej plodiny.

Nakoniec nech na základe dlhodobých predpovedí podnik získa informáciu o tom, aké počasie bude prevládať. Nech pravdepodobnosť, že to bude počasie A, je 0,1, počasie B 0,4 a počasie C 0,5. Pri takomto pravdepodobnostnom rozdelení stavov prírody sa podnik na základe Bayesovho princípu rozhodne pestovať tretiu plodinu, ktorá mu zaručuje najvyšší priemerný dôchodok 13,2.

Príklad 5.8

Podnik má objednávku vyrobiť niektorý stroj (výrobok), ktorého správna činnosť závisí od spoľahlivosti jeho dvoch súčiastok. Spotrebiteľ uzavrie zmluvu s výrobcom a zaplatí mu sumu a Kčs vtedy, keď výrobok po zavedení do výroby vyhovuje normám a po určitý čas pracuje spoľahlivo. Nech náklady spojené s kontrolou jednej súčiastky sú b Kčs. Výrobca má potom nasledujúce varianty:

I. Odovzdať výrobok spotrebiteľovi bez kontroly jeho dvoch súčiastok.

II. Náhodne vybrať jednu zo súčiastok a prekontrolovať ju. Ak je dobrá, predá výrobok spotrebiteľovi, a ak je chybná, odovzdá výrobok do zberu.

III. Náhodne vybrať jednu zo súčiastok a prekontrolovať ju. Ak je chybná, odovzdá výrobok do zberu. Ak vyhovuje normám, potom prekontroluje druhú súčiastku. Ak vyhovuje aj druhá súčiastka, predá výrobok spotrebiteľovi. V opačnom prípade ho odovzdá do zberu.

Z hľadiska prírody môžu nastať tieto tri možnosti:

a) Obe súčiastky vyhovujú normám.

b) Jedna zo súčiastok vyhovuje normám.

c) Ani jedna zo súčiastok nevyhovuje normám.

Označíme ich 0, 1 a 2.

Ak sa v prevádzke u spotrebiteľa ukáže, že výrobok nevyhovuje normám, výrobca nedostane za výrobok nič, ale naopak, sám musí zaplatiť spotrebiteľovi pokutu d Kčs.

Túto situáciu môžeme sformulovať ako hru proti prírode, kde prvý hráč sa usiluje dosiahnuť čo najvyšší dôchodok. Objasníme ako určiť prvky matice platieb tejto hry.

Ak podnik volí stratégiu I a príroda stratégiu 0, podnik dostane od spotrebiteľa a Kčs. Ďalej ak volí stratégiu II a príroda stratégiu 0, jeho platba bude $a - b$. Podobne, ak volí stratégiu III a príroda stratégiu 0, jeho platba bude $a - 2b$.

Ak podnik volí stratégiu I a príroda stratégiu 1 alebo 2, výrobok sa v prevádzke u spotrebiteľa ukáže ako chybný a podnik musí zaplatiť spotrebiteľovi pokutu d Kčs. Platba podniku v oboch prípadoch bude $-d$.

Ak príroda volí stratégiu 2 a podnik stratégiu II alebo III, podnik ihneď zistí, že výrobok nevyhovuje normám a odovzdá ho do zberu. Jeho platba v oboch prípadoch je $-$b.

Ak podnik volí stratégiu II a príroda stratégiu 1, potom pravdepodobnosť, že prvá súčiastka je chybná, je 1/2. Preto aj pravdepodobnosť, že ju neobjaví na prvý pokus, je 1/2. Teda, ak podnik na prvý pokus objaví, že súčiastka je chybná, jeho platba bude $-b$. V opačnom prípade zaplatí pokutu d plus náklady na kontrolu súčiastky. Stredná hodnota jeho platby teda bude

$$\frac{1}{2}(-b) + \frac{1}{2}(-b - d) = \frac{1}{2}d - b$$

Nakoniec ak podnik volí stratégiu III a príroda stratégiu 1, potom pravdepodobnosť, že podnik objaví chybu na prvý pokus, je 1/2, a pravdepodobnosť,

že ju objaví na druhý pokus, je 1. Keďže náklady na kontrolu jednej súčiastky sú b, jeho stredná platba bude

$$\frac{1}{2}(-b) + (-b) = -\frac{3}{2}b$$

Matica platieb hry teda bude

$$\begin{pmatrix} a & -d & -d \\ a - b & -\frac{1}{2}d - b & -b \\ a - 2b & -\frac{3}{2}b & -b \end{pmatrix}$$

Nech napr. $a = 200$, $b = 50$, $d = 100$. Potom matica platieb bude

$$\begin{pmatrix} 200 & -100 & -100 \\ 150 & -100 & -50 \\ 100 & -75 & -50 \end{pmatrix}$$

Môžeme ukázať, že ak sa podnik bude riadiť podľa minmaxového princípu, volí stratégiu III, teda prekontroluje obidve súčiastky. Ak sa bude riadiť podľa princípu nedostatočnej evidencie, rozhodne sa voliť stratégiu I alebo II. Podobne by sme mohli preskúmať aj použitie iných princípov.

Uvedené príklady názorne ukázali problémy použitia princípov rozhodovania za rizika a neurčitosti. Niektoré ich nedostatky sa usiluje odstrániť princíp založený na teórii hier s ohraničeniami.

5.3 HRY S OHRANIČENIAMI

Pri analýze každej triedy hier v predchádzajúcich kapitolách sme alebo implicitne alebo explicitne predpokladali, do akej miery sú hráči informovaní o správaní protihráčov. Táto informácia sa potom využívala aj v pravidlách optimálneho postupu pri voľbách stratégií jednotlivými hráčmi.

Ukazuje sa, že v praktických aplikáciách hier môže byť užitočná aj dodatočná informácia, ktorú hráči môžu získať na základe skúsenosti z predchádzajúcej činnosti (hry), ďalej pomocou experimentov alebo skúmaním tendencií alebo zvykov protihráčov. Pre praktické použitie sú však najdôležitejším zdrojom informácie štatistické skúmania. Takáto informácia v terminológii teórie hier bude vlastne predstavovať dodatočné ohraničenia stratégie jednotlivých hráčov.

Definícia 5.2

Konečnú hru dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb nazveme hra s ohraničeniami, ak stratégie aspoň jedného z hráčov sú ohraničené dodatočnými lineárnymi nerovnicami.[1]

Problémy spojené s formuláciou a riešením hier s ohraničeniami pomôže objasniť nasledujúci príklad.

Príklad 5.9

Predpokladajme, že nepriateľ používa pri výrobe bojových lietadiel dva rôzne systémy protiraketovej obrany. Označíme ich A a B. Počty lietadiel, ktoré sú vybavené tým-ktorým protiraketovým systémom, nie sú nám známe. Na obranu proti vzdušným útokom nepriateľa môžeme vyrábať dva rôzne typy rakiet zem—vzduch. Označíme ich I a II. Nech sú známe pravdepodobnosti, že raketa daného typu je schopná vyradiť lietadlo vybavené jednotlivými systémami obrany. Tieto pravdepodobnosti sú uvedené v *tab. 5.5.*

Tabuľka 5.5

Typy rakiet	Systémy protiraketovej obrany	
	A	B
I	0,7	0,5
II	0,6	0,9

Musíme sa rozhodnúť, v akých proporciách budeme vyrábať a používať jednotlivé typy rakiet, aby sme v prípade vojnového konfliktu zaručili maximálnu efektívnosť protivzdušnej obrany, t.j. maximálnu strednú hodnotu počtu zničených bojových lietadiel nepriateľa.

V tejto hre predpokladáme, že aj protivník je racionálny hráč. Preto pri rozhodovaní o výrobe rakiet sa budeme riadiť minmaxovým princípom. Z našej matice platieb vidno, že nemá sedlový bod, preto hra bude mať riešenie v zmiešaných stratégiách. Ľahko preveríme, že naša optimálna stratégia bude $\boldsymbol{x} = (3/5, 2/5)$ a optimálna stratégia protivníka bude $\boldsymbol{y} = (4/5, 1/5)$. Hodnota tejto hry je 0,66. Z toho vyplýva, že naše optimálne rozhodnutie bude vyrábať rakety v proporcii 3 : 2. Taká stratégia nám zaručí 66% účinnosť zničenia nepriateľských lietadiel.

Predpokladajme ďalej, že naša kontrarozviedka zistila, že nepriateľ nie je schopný vyrábať viac ako jednu polovicu protiraketových systémov typu A a vybaviť nimi svoje lietadlá. Z tejto informácie vyplýva dodatočné ohraničenie na prvú stratégiu nepriateľa, t.j. že $y_1 \leqq \frac{1}{2}$.

[1] Vieme, že v maticových hrách zmiešaná stratégia hráča, napr. $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, je ohraničená iba podmienkami, že všetky y_j sú nezáporné a ich suma je rovná 1.

Na základe tejto dodatočnej informácie môžeme transformovať pôvodnú hru na hru s ohraničeniami. Z predchádzajúcich poznatkov vieme (pozri 2. kapitolu), že na riešenie tejto úlohy možno použiť známe metódy lineárneho programovania. Potom zodpovedajúce úlohy lineárneho programovania pre oboch hráčov môžeme zapísať takto:

maximalizovať $-d$

za podmienok

$$0{,}7y_1 + 0{,}5y_2 - d \leqq 0$$
$$0{,}6y_1 + 0{,}9y_2 - d \leqq 0$$
$$y_1 \leqq \frac{1}{2}$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1, y_2 \geqq 0$$

a

minimalizovať $r + 1/2w_1$

za podmienok

$$0{,}7x_1 + 0{,}6x_2 + r + w_1 \geqq 0$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}9x_2 + r \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1, x_2, w_1 \geqq 0$$

Riešením jednej z týchto úloh nájdeme, že optimálna stratégia prvého hráča je $\boldsymbol{x}(0, 1)$ a optimálna stratégia druhého hráča je $\boldsymbol{y} = (1/2, 1/2)$. Hodnota novej hry bude 0,75.

Z toho vyplýva, že ak do hry zahrnieme dodatočnú informáciu, zmenia sa optimálne stratégie hráčov, ako aj hodnota hry. Podľa nových výsledkov budeme vyrábať len rakety typu II. Táto stratégia nám zaručí 75% účinnosť zničenia nepriateľských lietadiel v prípade vojnového konfliktu. Vidíme, že dodatočná informácia o stratégiách protivníka zmenila výsledok hry v náš prospech.

Všeobecne v hrách dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb dodatočná informácia, ktorú jeden z hráčov získa o stratégiách protivníka, mu dáva určité výhody pri rozhodovaní. Hry s ohraničeniami teda umožňujú realistickejšie charakterizovať mnohé ekonomické, vojenské a štatisticko-rozhodovacie situácie.

Hry s ohraničeniami sa pôvodne skúmali v [25] a neskôr ďalej rozvinuli v [28] a [29]. Nás však zaujímajú hry s ohraničeniami z hľadiska rozhodovania za rizika a neurčitosti. Preto ich v ďalšom výklade aplikujeme na hry proti prírode.

Ukážeme, že hry s ohraničeniami odstraňujú niektoré nedostatky princípov, ktoré sme uviedli v súvislosti s rozhodovaním za rizika a neurčitosti. Konkrétne riešenie získané na základe hier s ohraničeniami bude lepšie zodpovedať skutočnosti (dávať reálnejšie výsledky pre prvého hráča), ako riešenie získané na základe Bayesovho princípu alebo princípu nedostatočnej evidencie.[1]

Hry s ohraničeniami sa dajú upraviť na normálny tvar pomocou normalizácie a môžeme ich riešiť známymi metódami. Z teórie maticových hier vieme, že hra je ekvivalentná dvojici úloh lineárneho programovania. Preto aj hru s ohraničeniami možno zapísať ako dvojicu úloh lineárneho programovania. Normalizované riešenie takýchto úloh potom tvorí sedlový bod funkcie strednej hodnoty platby pôvodnej hry.

Veta 5.1

Nech je daná hra s ohraničeniami s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$. Preskúmame dvojicu duálnych úloh lineárneho programovania zodpovedajúcu tejto hre:

minimalizovať

$$r + \sum_k w_k b_k \tag{5.1}$$

za podmienok

$$\sum_i x_i a_{ij} + r + \sum_k w_k b_{kj} \geqq 0$$

$$\sum_i x_i = 1$$

$$\sum_i x_i q_{is} \geqq q_s$$

a

maximalizovať

$$-d + \sum_s q_s z_s \tag{5.2}$$

za podmienok

$$\sum_j a_{ij} y_j - d + \sum_s q_{ij} z_s \leqq 0$$

$$\sum_j y_j = 1$$

$$\sum_j b_{kj} y_j \leqq b_k$$

[1] Zrejmé je, že hypotéza o správaní prírody v hrách s ohraničeniami je reálnejšia než hypotéza predpokladaná podľa týchto princípov, pretože v prvom prípade pravdepodobnosti jednotlivých stavov prírody sú vyjadrené ako nerovnice, kým v druhom prípade ako rovnice.

kde $x_i, y_j, w_k, z_s \geqq 0$, d a r nie sú ohraničené znamienkom, sumy sú konečné, x_i a y_j sú pravdepodobnosti, s ktorými hráči volia svoje stratégie a dodatočné ohraničenia stratégií hráčov sú určené treťou skupinou nerovníc v každej úlohe.

Potom ak podmienky ohraničení úloh (5.1) a (5.2) sú konzistentné, ich riešenia existujú[1], a možno z nich odvodiť aj riešenie hry.

Dôkaz

Nech

$$\sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j$$

je stredná hodnota platby v danej hre. Potom z poznatkov 2. kapitoly vyplýva, že platí

$$\begin{gathered} -r - \sum_k w_k b_k \leqq -r - \sum_j \sum_k w_k b_{kj} y_j \leqq \sum_i \sum_j x_j a_{ij} y_j \\ \sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j \leqq d - \sum_i \sum_s x_i q_{is} z_s \leqq d - \sum_s q_s z_s \end{gathered} \tag{5.3}$$

Z prvých dvoch sústav ohraničení úloh (5.1) a (5.2), ako aj z ohraničení x_i a y_j vyplýva, že účelové funkcie úloh dosahujú konečné minimum a maximum. Na základe duálnej vety lineárneho programovania tieto dve veličiny existujú a sú si navzájom rovné. Ak optimálne riešenie označíme nulovým indexom, tak zo vzťahov (5.3) vyplýva

$$-r^0 - \sum_k w_k^0 b_k = \sum_i \sum_j x_i^0 a_{ij} y_j^0 = d^0 - \sum_s q_s^0 z_s \tag{5.4}$$

preto platia aj nerovnice

$$\sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j^0 \leqq \sum_i \sum_j x_i^0 a_{ij} y_j^0 \leqq \sum_i \sum_j x_i^0 a_{ij} y_j$$

Teda bod (x^0, y^0) je sedlový bod funkcie platieb, čo bolo potrebné dokázať.

Použitie hier s ohraničeniami pri rozhodovaní za rizika a neurčitosti objasníme na nasledujúcom príklade obstarania materiálu.

Príklad 5.11

Nákupca musí každý mesiac nakúpiť 5 000 ton materiálu (napr. nafty) pre potreby podniku. Môže si pritom vybrať medzi dvoma dodávateľmi, ktorých označíme D_1 a D_2. Dodávateľ D_1 dodá vždy objednané množstvo a účtuje sumu a Kčs za tonu. Dodávateľ D_2 účtuje b Kčs za tonu, avšak môže dodať len množstvá, ktoré sa objednajú mesiac vopred. Okrem toho tento dodávateľ nie

[1] Možno ľahko dokázať, že hra s ohraničeniami nemusí mať vždy riešenie.

je spoľahlivý a objednané množstvo materiálu nemusí v určenom čase dodať. Naproti tomu dodávateľ D_1 je spoľahlivý a môže zaručiť aj expresné dodávky, avšak v takom prípade účtuje c Kčs naviac za jednu tonu. Predpokladajme ďalej, že dodávky sú len v tisíctonových zásielkach.

Nákupca uzatvára zmluvy na dodávky so svojimi dodávateľmi na začiatku mesiaca. Ku koncu mesiaca musí uspokojiť požiadavky podniku aj za cenu expresných dodávok od dodávateľa D_1. Nákupca sa bude snažiť minimalizovať náklady na zásobovanie podniku materiálom.

Túto situáciu môžeme interpretovať ako hru proti prírode, kde prvý hráč je nákupca a druhý hráč je nespoľahlivý dodávateľ D_2, ktorý sa správa ako príroda. Maticu platieb tejto hry zapíšeme v *tab. 5.6*. Údaje sú uvedené v tisícoch Kčs.[1]

Predpokladajme ďalej, že $a = 5$, $b = 3$ a $c = 7$. Ak dosadíme tieto údaje do *tab. 5.6*, dostaneme maticu platieb

$$\begin{pmatrix} -25 & -25 & -25 & -25 & -25 & -25 \\ -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -27 \\ -21 & -21 & -21 & -21 & -25 & -29 \\ -19 & -19 & -19 & -23 & -27 & -31 \\ -17 & -17 & -21 & -25 & -29 & -33 \\ -15 & -19 & -23 & -27 & -31 & -35 \end{pmatrix}$$

Tabuľka 5.6

Množstvo ton od D_2 / Stratégie nákupcu	5 y_1	4 y_2	3 y_3	2 y_4	1 y_5	0 y_6
5 od D_1, 0 od D_2	$-5a$	$-5a$	$-5a$	$-5a$	$-5a$	$-5a$
4 od D_1, 1 od D_2	$-4a-b$	$-4a-b$	$-4a-b$	$-4a-b$	$-4a-b$	$-4a-c$
3 od D_1, 2 od D_2	$-3a-2b$	$-3a-2b$	$-3a-2b$	$-3a-2b$	$-3a-b-c$	$-3a-2c$
2 od D_1, 3 od D_2	$-2a-3b$	$-2a-3b$	$-2a-3b$	$-2a-2b-c$	$-2a-b-2c$	$-2a-3c$
1 od D_1, 4 od D_2	$-a-4b$	$-a-4b$	$-a-3b-c$	$-a-2b-2c$	$-a-b-3c$	$-a-4c$
0 od D_1, 5 od D_2	$-5b$	$-4b-c$	$-3b-2c$	$-2b-3c$	$-b-4c$	$-5c$

[1] Keďže prvý hráč je maximalizujúci a v tomto prípade jeho úlohou je minimalizovať náklady, je zrejmé, že prvky matice platieb sú záporné.

Ak sa prvý hráč (nákupca) bude riadiť minmaxovým princípom, rozhodne sa objednať celé množstvo 5 000 ton materiálu od spoľahlivého dodávateľa. Teda jeho optimálnou stratégiou bude prvá stratégia. V takom prípade náklady na nákup materiálu budú každý mesiac 25 000,— Kčs.

Nech za uplynulých desať mesiacov dodávateľ D_2 dodal načas 5 000 ton materiálu tri razy, 4 000 ton raz, 3 000 ton dva razy, 2 000 ton dva razy, 1 000 ton raz a v jednom prípade nedodal nič. Potom pri voľbe svojej stratégie sa nákupca môže riadiť podľa Bayesovho princípu. Ak teda predpokladá, že zmiešaná stratégia druhého hráča je

$$y = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

jeho optimálnou stratégiou bude objednať 2 000 ton materiálu od dodávateľa D_1 a 3 000 ton od dodávateľa D_2. V tomto prípade priemerné náklady na nákup materiálu každý mesiac budú 21 800,— Kčs.

Sformulujeme teraz túto situáciu ako hru s ohraničeniami. Nech nákupca na základe skúsenosti z minulých dodávok môže usúdiť, že nespoľahlivý dodávateľ D_2 dodáva jednotlivé množstvá ton materiálu s nasledujúcimi ohraničeniami pravdepodobnosti y_j voľby jednotlivých čistých stratégií

$$y_1 \leqq 1, \quad y_2 \leqq \frac{1}{2}, \quad y_3 \leqq \frac{1}{4}, \quad y_4 \leqq \frac{1}{10}, \quad y_5 \leqq \frac{1}{25}, \quad y_6 \leqq \frac{1}{50}$$

Ak pridáme tieto dodatočné ohraničenia k pôvodnej hre, dostaneme hru s ohraničeniami. Prvý hráč (nákupca) určí svoju optimálnu stratégiu riešením úlohy lineárneho programovania[1]

minimalizovať

$$r + w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{4}w_3 + \frac{1}{10}w_4 + \frac{1}{25}w_5 + \frac{1}{50}w_6 + Mw_7$$

za podmienok

$$r - 25x_1 - 23x_2 - 21x_3 - 19x_4 - 17x_5 - 15x_6 + w_1 \geqq 0$$
$$r - 25x_1 - 23x_2 - 21x_3 - 19x_4 - 17x_5 - 19x_6 + w_2 \geqq 0$$
$$r - 25x_1 - 23x_2 - 21x_3 - 19x_4 - 21x_5 - 23x_6 + w_3 \geqq 0$$
$$r - 25x_1 - 23x_2 - 21x_3 - 23x_4 - 25x_5 - 27x_6 + w_4 \geqq 0$$
$$r - 25x_1 - 23x_2 - 25x_3 - 27x_4 - 29x_5 - 31x_6 + w_5 \geqq 0$$

[1] M je dostatočne veľké číslo (nearchimedovská veličina) používané v metódach riešenia úloh lineárneho programovania.

$$r - 25x_1 - 27x_2 - 29x_3 - 31x_4 - 33x_5 - 35x_6 + w_6 \geqq 0$$
$$x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 + \quad x_5 + \quad x_6 + w_7 = 1$$
$$x_j,\ w_k \geqq 0$$

Z riešenia tejto úlohy lineárneho programovania zistíme, že optimálna stratégia nákupcu bude jeho piata stratégia, t. j. objedná 1 000 ton materiálu od dodávateľa D_1 a 4 000 ton od dodávateľa D_2. Optimálna stratégia druhého hráča bude

$$y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0\right)$$

Priemerné náklady nákupcu na nákup materiálu budú mesačne 19 370,— Kčs.

Môžeme uzavrieť, že princíp voľby riešenia (rozhodovania) za rizika a neurčitosti, ktorý je zabudovaný v hrách s ohraničeniami, je v istom zmysle vhodnejší než princípy rozhodovania opísané v stati 5.2, pretože reálnejšie charakterizuje skúmanú rozhodovaciu situáciu.

Poznámka 5.5

Pre praktické použitie tohoto princípu rozhodovania treba najprv zabezpečiť prostriedky, ktoré umožňujú upraviť skúmanú situáciu na hru s ohraničeniami (napr. štatistické skúmanie). V tejto súvislosti treba uvažovať aj o nákladoch spojených so získaním dodatočnej informácie (ohraničeniach) o stratégiách druhého hráča (prírody). Preto použitie princípu rozhodovania zabudovaného v hrách s ohraničeniami závisí aj od efektívnosti informácie potrebnej na vytvorenie ohraničení.

Princípy rozhodovania za neurčitosti boli v literatúre ďalej rozvinuté aj týmto smerom. Predpokladajme, že prvky matice platieb hry nie sú zadané deterministicky, ale sú náhodné premenné. Potom takéto hry nazývame hry s pravdepodobnostnými ohraničeniami alebo stochastické hry. Na riešenie takýchto hier možno využiť základné poznatky teórie programovania s pravdepodobnostnými ohraničeniami (pozri napr. [26]).

Zoznámime sa aspoň v krátkosti s problémami rozhodovania v hrách s pravdepodobnostnými ohraničeniami. Majme maticovú hru alebo hru proti prírode s maticou platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} sú náhodné premenné. Ak prvý hráč volí svoju i-tú stratégiu a druhý hráč svoju j-tú stratégiu, určíme platbu prvému hráčovi pozorovaním náhodnej premennej a_{ij}. Jeho konkrétnu platbu pre ľubovoľnú partiu hry označíme $a_{ij}(w)$, kde w je z oblasti hodnôt a_{ij} a volí sa podľa známeho pravdepodobnostného rozdelenia.

Jeden prístup k riešeniu takýchto hier (pozri [11]) sa zakladá na zámene prvkov matice platieb a_{ij} ich strednými hodnotami. Tým sa vlastne transformuje hra s náhodnými platbami na deterministickú hru dvoch hráčov s nulovým súčtom platieb.

Iný prístup bol navrhnutý v práci [11]. Autori formulovali hru s náhodnými

platbami ako úlohu, v ktorej prvý hráč maximalizuje svoju platbu za podmienok, že ju dosiahne s určitou zadanou pravdepodobnosťou.

Hlavný problém pri analýze hier s náhodnými platbami je v určení toho, čo treba rozumieť pojmom optimálna stratégia hráča. Ak sa hráč pri voľbe svojej optimálnej stratégie riadi minmaxovým princípom, tak v deterministickej hre maximalizuje strednú hodnotu platby, ktorú môže získať bez ohľadu na to, akú stratégiu volí protivník. Pre deterministickú hru je toto kritérium vhodné, pretože hráč nebude riskovať tým, že predpokladá neoptimálny postup protivníka.[1]

Na druhej strane, ak sú platby náhodné, tak každý hráč riskuje (hŕá hazardne). Teda zaručená platba, ktorú hráč môže získať, už nemá zmysel, s výnimkou, ak by hráč predpokladal, že nastane najmenšia hodnota $a_{ij}(w)$. Preto pri riešení takýchto situácií treba brať do úvahy širšie kritériá voľby optimálnych stratégií, ktoré využívajú aj charakteristiky náhodnej platby. Na použitie takéhoto postupu boli v literatúre navrhnuté viaceré metódy, ktoré využívajú súčasnú teóriu pravdepodobnosti a teóriu matematického programovania. Podrobnejšiu analýzu týchto metód možno nájsť napr. v [33].

Okrem týchto hier môžeme skúmať aj hry, kde vystupuje viac racionálnych účastníkov proti jednému alebo viacerým indiferentným účastníkom. Modely rozhodovania v takýchto situáciách sa podrobnejšie skúmajú pre hry v normálnom tvare [3] a pre hry v tvare charakteristickej funkcie [30].

5.4 HRY S p-RACIONÁLNYMI HRÁČMI

Ďalšie rozšírenie princípov rozhodovania za rizika a neurčitosti vyplýva zo skutočnosti, že hráči sa niekedy v rozhodovacích situáciách nedajú jednoznačne klasifikovať na racionálnych a indiferentných. Takýto stav môže nastať alebo v prípade, že racionálni hráči hodnotia výsledky konfliktnej situácie z rôznych hľadísk, alebo nevolia stratégie, ktoré zodpovedajú ich predpokladanému správaniu. Teda ako skutočne racionálni hráči sa nesprávajú alebo z dôvodu, že nepoznajú príslušné teoretické výsledky, alebo nemajú možnosť vypočítať svoju optimálnu stratégiu.

Definícia 5.3

Hráča nazveme p-racionálnym, ak sa s pravdepodobnosťou p správa ako racionálny a s pravdepodobnosťou $1 - p$ ako indiferentný.

[1] V podstate možno povedať, že aj keď sa prvý hráč pri voľbe svojej stratégie riadi niektorým iným princípom, maximalizuje strednú hodnotu platby, pričom predpokladá určité správanie protihráča.

Taký hráč potom nemá charakter náhodného mechanizmu, pretože v rámci svojich možností má záujem na získaní čo najväčšej výhry.[1]

Potom môžeme skúmať hry, v ktorých vystupuje aspoň jeden racionálny hráč a aspoň jeden p-racionálny hráč. Zrejmé je, že optimálne stratégie racionálnych hráčov budú závisieť od parametra p, ktoré charakterizujú p-racionálnych hráčov. Ak $p = 1$, potom racionálny hráč má za protivníka takisto racionálneho hráča. Naopak, ak $p = 0$, racionálny hráč má za protivníka indiferentného hráča a rieši úlohu rozhodovania za rizika a neurčitosti.

Poznámka 5.6

Všeobecne racionálny hráč v takých hrách nemusí vždy získať rovnakú platbu ako v hre proti racionálnemu hráčovi. Zrejmé je, že ak $p < 1$, p-racionálny hráč nie je schopný voliť svoju optimálnu stratégiu (ako keby bol skutočne racionálny), racionálny hráč môže voliť aj čisté stratégie.

Najjednoduchšou hrou je hra dvoch hráčov, ktorú môžeme zadať pomocou matice platieb $\mathbf{A} = (a_{ij})$, pričom prvý hráč je racionálny a druhý hráč je p-racionálny. Potom prvý hráč predpokladá, že jeho protivník volí niektorú stratégiu

$$\boldsymbol{s} = p\boldsymbol{y}^0 + (1 - p)\,\boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{y}^0$ je optimálna stratégia druhého hráča, ktorú by volil, ak by bol racionálny a $\boldsymbol{r}$ je jeho stratégia, ktorú by volil, ak by bol indiferentný.

Potom prvý hráč bude voliť takú čistú stratégiu, ktorá maximalizuje jeho strednú hodnotu platby, teda

$$\max_{i \in X} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{s} \geqq \boldsymbol{x}^{(0)} \mathbf{A} \boldsymbol{s}$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ je i-tý riadok matice $\mathbf{A}$,

$\boldsymbol{x}^0$ — optimálna stratégia v hre proti racionálnemu hráčovi.

Jeho optimálnou stratégiou v hre proti p-racionálnemu hráčovi bude taká čistá stratégia $i_0 \in X$, pre ktorú

$$\boldsymbol{a}_{i_0} \boldsymbol{s} = \max_{i \in X} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{s}$$

Platba, ktorú prvý hráč v tejto hre získa v priemere naviac v porovnaní s prípadom, ak by druhý hráč bol skutočne racionálnym, sa nazýva prebytok. Môžeme ju vyjadriť ako funkciu

$$\varphi(p) = \max_{i \in X} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{s} - \boldsymbol{x}^0 \mathbf{A} \boldsymbol{s}$$

[1] Pripomíname, že racionálny hráč volí stratégie podľa definícií uvedených v predchádzajúcich kapitolách a indiferentný hráč volí stratégie z množiny stratégií podľa známeho alebo neznámeho pravdepodobnostného rozdelenia.

Hry proti p-racionálnym hráčom sa podrobnejšie skúmajú v [42]. Autor ukazuje, že ak prvý hráč pozná odchýlku stratégie druhého hráča od jeho stratégie $y^{(0)}$, môže to využiť vo svoj prospech tak, že volí inú stratégiu $x^{(0)}$.

Pre praktické aplikácie má dôležitú úlohu odhad parametra p. V literatúre sa navrhuje nájsť parameter p pomocou experimentov alebo na základe skúsenosti hráčov.

Príklad 5.12

Podnik má zdroje na výrobu n výrobkov, ktoré môže vyrábať v určitých množstvách. Výrobky predáva na zahraničnom trhu a musí sa rozhodnúť pre taký výrobný program, ktorý mu zabezpečí maximálnu tržbu vo svetových cenách. Jeho rozhodnutie bude okrem vlastných ohraničení závisieť aj od dopytu po týchto výrobkoch na svetovom trhu a od výšky svetových cien, čo pre podnik predstavuje nekontrolovateľný faktor.

Nech množstvá výrobkov, ktoré sa podnik rozhodne vyrábať, sú $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Množina stratégií podniku (prvého hráča) je

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in [h_i, H_i]\}$$

kde h_i je dolná hranica a H_i je horná hranica množstiev jednotlivých výrobkov. Druhý hráč je mechanizmus riadiaci svetové ceny výrobkov. Nech množina jeho stratégií je

$$Y = \{\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ y_i \in [k_i, K_i]\}$$

kde k_i a K_i sú hranice, v ktorých sa môžu pohybovať svetové ceny. Ceny ovplyvňuje aj konkurencia iných výrobcov, ktorí môžu ponúkať výrobky výhodnejšie, a preto ich cenu možno celkovo znížiť. Preto druhého hráča možno považovať za p-racionálneho ($p > 0$).

Nech funkcie platieb hráčov sú

$$M_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{a} \quad M_2(x, y) = -M_1(x, y)$$

Potom $\boldsymbol{x}^0$ a $\boldsymbol{y}^0$, ktoré vyhovujú podmienkam

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^0 = \max_{x} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^0, \qquad y^0 = (k_1, \ldots, k_n)$$

sú optimálne stratégie hry. Nech prvý hráč predpokladá, že ceny sa rovnajú dlhodobým priemerom a $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, kde r_i je priemerná cena i-teho výrobku. Optimálna stratégia podniku potom vyhovuje podmienkam

$$\max_{x} \sum_{i=1}^{n} x_i p y_i^0 + (1 - p)\, r_i$$

5.5 APLIKÁCIE MODELOV ROZHODOVANIA ZA RIZIKA A NEURČITOSTI

Modely rozhodovania za rizika a neurčitosti majú najrozsiahlejšie aplikácie v ekonomike. Dôkazom toho sú aj mnohé príklady, ktoré sme tu uviedli. Zhrnieme v krátkosti ekonomické aplikácie týchto modelov, ktoré sú opísané v literatúre.

Jedna skupina aplikácií týchto modelov sa vzťahuje na kontrolu kvality výrobkov. Zrejmé je, že moderná priemyselná výroba musí zabezpečiť výrobu kvalitných výrobkov. Náklady na kontrolu kvality by v mnohých prípadoch mohli neúmerne zvýšiť cenu výrobkov. Preto rozhodnutie o tom, či vykonávať kontrolu kvality všetkých alebo len niektorých výrobkov, môže mať veľký význam, najmä vtedy, keď sankcie za dodanie nekvalitných výrobkov sú veľké. Na druhej strane však kvalita výrobkov často závisí od mnohých faktorov, ktoré nepôsobia cieľavedomo. Výrobca sa preto musí rozhodovať za rizika a neurčitosti. Jeho rozhodnutie závisí od takých faktorov, ako sú napr. priemerný zisk z výroby jedného výrobku, náklady na kontrolu jedného výrobku, náklady na opravu výrobku, ak sa chyba objaví pred jeho predajom, náklady alebo pokuty, ktoré musí výrobca zaplatiť, ak sa chyba objaví u spotrebiteľa v záručnej lehote, pravdepodobnosti chyby výrobku, veľkosti chyby.

Takéto rozhodovacie situácie sa dajú najlepšie modelovať pomocou hier proti prírode alebo hier s ohraničeniami. Použitie konkrétneho princípu rozhodovania závisí od konkrétnej skúmanej situácie. Aplikáciami tohto druhu sa špeciálne zaoberá práca [44].

Iná oblasť aplikácií týchto modelov sa priamo dotýka úloh plánovania výroby alebo rozhodovania o výrobnom programe. Také modely skúmajú najmä situácie, keď výrobný program ovplyvňujú faktory, ktoré nepôsobia cieľavedomo, napr. ceny surovín na svetovom trhu, úroveň dopytu po výrobkoch. Príklady takýchto aplikácií sú podrobnejšie opísané v [6].

Podobne aj mnohé situácie rozhodovania o investíciách majú charakter modelov rozhodovania za rizika a neurčitosti.

Príklad 5.13

Vláda rozhoduje o výstavbe elektrární na obdobie budúcich desať rokov. Môže rozhodnúť o výstavbe rôznych typov elektrární, v závislosti od toho, či výroba elektriny v nich sa zakladá na spaľovaní uhlia, ropy, plynu alebo jadrového paliva.

Optimálne rozhodnutie o výstavbe elektrární s danou výrobnou kapacitou závisí od mnohých faktorov, ktoré môžu mať náhodný charakter (napr. náklady na výstavbu projektovanej kapacity, náklady na výstavbu zodpovedajúcich ekologických stavieb, cena za jednotku vyrábanej energie). Cena jednotky

vyrábanej energie bude závisieť aj od cien používaného paliva. Ceny paliva však závisia od vývoja svetových cien, ktorý je určený viac-menej náhodne. Preto rozhodnutie vlády bude okrem existujúcej informácie závisieť aj od použitého princípu rozhodovania.

Mnohé aplikácie možno uskutočniť v odvetviach priemyslu, kde sa sortiment výroby často mení, napr. v odevnom priemysle pri navrhovaní módnych noviniek do výroby na budúce obdobie. Úloha pozostáva v nájdení optimálneho výrobného programu za predpokladu náhodného dopytu. Z rozhodovania musí vyplývať optimálna cena výrobkov, ako aj optimálne množstvá ich výroby.

V literatúre sú opísané aj mnohé iné aplikácie modelov rozhodovania za rizika a neurčitosti, ktoré využívajú metódy teórie hier. Patria k nim aplikácie v oblasti optimálnej politiky reklamy, prijímania pracovníkov na funkcie, optimálnej politiky riadenia a rozhodovania v priemysle a poľnohospodárstve a pod. Podrobný prehľad týchto a iných aplikácií je uvedený v [6].

Ďalší rozvoj aplikácií modelov rozhodovania za rizika a neurčitosti je spojený s rozvojom hier s ohraničeniami. Hry s ohraničeniami poskytujú reálnejšie nástroje rozhodovania, ak racionálny hráč má určitú informáciu o správaní indiferentného hráča. Na ich riešenie netreba vyberať vhodný princíp rozhodovania. Optimálne rozhodnutie priamo vyplýva z riešenia zodpovedajúcich úloh lineárneho programovania. Prehľad aplikácií týchto modelov je v [25] a [27].

Podstatný rozvoj teórie a aplikácií modelov rozhodovania za rizika a neurčitosti je spojený s rozvojom teórie hier s pravdepodobnostnými ohraničeniami. Takéto hry predstavujú ďalší krok k reálnosti dôsledkov rozhodovania za rizika a neurčitosti. Ekonomické aplikácie týchto modelov sú opísané v [11] a [28].

6 NIEKTORÉ INÉ TYPY HIER, APLIKÁCIE A ĎALŠÍ ROZVOJ TEÓRIE HIER

Okrem typov hier, ktoré sme preskúmali v predchádzajúcich kapitolách, sú známe aj iné typy hier. Niektorým z nich sú venované rozsiahle monografie a články. V tejto kapitole opíšeme len niektoré z týchto typov hier. Najprv uvedieme základné pojmy o diferenciálnych hrách a hrách s vektorovými funkciami platieb. Ďalej naznačíme niektoré aplikácie teórie hier v spoločenských vedách. V závere stručne opíšeme ďalšie smery rozvoja teórie hier.

6.1 DIFERENCIÁLNE HRY

Spomedzi nekonečných hier dvoch hráčov možno vyčleniť jednu triedu hier — *diferenciálne hry*. V takých hrách ide o dynamické procesy rozhodovania, ktoré možno opísať obyčajnými alebo parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, pričom hráči majú rôznu informovanosť o priebehu hry.

6.1.1 Diferenciálne antagonistické hry s úplnou informáciou

Predpokladajme, že v priebehu hry, v ktorej prvý hráč maximalizuje svoju platbu, hráči majú dokonalú informáciu, t.j. pri každom ťahu hry každý hráč pozná, v akej pozícii sa nachádza on, ako aj jeho protivník. Každý hráč volí svoju stratégiu v určitom čase. Ak sa časové intervaly medzi jednotlivými ťahmi obidvoch hráčov zmenšujú, v limitnom prípade dostávame hru, v ktorej každý hráč musí uskutočniť voľbu v každom časovom okamihu. Pretože voľby hráčov sú spojité, môžeme predpokladať, že prvky hry sa v priebehu malých časových intervalov budú meniť len nepatrne, teda budú sa meniť spojito. Inými slovami, ak prvok hry je reprezentovaný bodom euklidovského priestoru príslušnej dimenzie, potom stratégie hráčov určujú pohyb tohto bodu (prvku hry), ktorý môžeme opísať pomocou diferenciálnych rovníc.

Matematicky môžeme diferenciálnu hru definovať takto: Prvok hry v diferenciálnej hre je daný n-ticou reálnych čísel $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktoré sa nazývajú stavové premenné. V každom časovom okamihu t volí prvý hráč r-ticu reálnych čísel $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ za určitých podmienok, ktoré majú obvykle tvar $a_i \leqq u_i \leqq b_i$, kde a_i, b_i $(i = 1, \ldots, r)$ sú konštanty. Podobne druhý hráč volí s-ticu

čísel $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_s)$, za podmienok $c_j \leqq v_j \leqq d_j$, kde c_j, d_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sú konštanty.

Vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nazývame *kontrolné* (riadiace) *premenné*. Kontrolné premenné ovplyvňujú stavové premenné podľa *sústavy diferenciálnych rovníc* (nazývaných kinematické rovnice)

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.1}$$

kde $\dot{x}_i$ sú derivácie x_i podľa času t.

Diferenciálna hra pokračuje podľa diferenciálnych rovníc (6.1) do konečnej fázy, ktorá nastane, ak stavové premenné dosiahnu hodnoty zo zadanej variety $S \subset E_n$. Varieta S sa nazýva *konečná varieta*.

V teórii diferenciálnych hier berieme vo väčšine prípadov za konečnú varietu nejaký povrch, ktorý sa nazýva *konečný povrch* a je časťou hranice oblasti hry $E \subset E_n$. Ak fázový bod $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dosiahne povrch S, hra končí. Konečný povrch S má dimenziu $n - 1$. Ukážeme, že na nájdenie riešenia diferenciálnej hry sa používa aparát diferenciálnych rovníc. Konečný povrch, ktorý slúži na získanie začiatočných podmienok, musí mať dimenziu práve $n - 1$, čo zabezpečuje jediné riešenie. Ak je dimenzia konečnej variety menšia ako $n - 1$, môže nastať degenerácia.

V praktických aplikáciách dosiahnutie konečného povrchu môže znamenať, že prvý hráč je dostatočne blízko k druhému hráčovi, aby ho dostihol, alebo, že skončil určený časový interval (ak hra musí skončiť v danom časovom intervale, aj čas je stavovou premennou).

Diferenciálna hra môže mať niekoľko typov platieb. Obvykle sa používa *konečná* a *integrálna platba*, alebo ich kombinácia.

Ak sa hra začína v čase $t = 0$ a končí v čase $t = T$ v bode $(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T))$ na konečnom povrchu S, potom konečnú platbu reprezentuje funkcia $F(x_1(T), \ldots, x_n(T))$, ktorá je definovaná na tomto konečnom povrchu.

Integrálna platba má tvar

$$\int_0^T p(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r; v_1, \ldots, v_s)\, \mathrm{d}t \tag{6.2}$$

Najvšeobecnejší typ platby, ktorý prichádza do úvahy, je funkcia F a integrál typu (6.2).

Podobne ako v diskrétnych viackrokových hrách metóda riešenia diferenciálnych hier s úplnou informáciou spočíva v zámene prvkov hry za ich hodnoty (hodnoty hier na každom kroku) s nasledovným riešením rekurentných rovníc pre tieto hodnoty (tieto rekurentné rovnice budú diferenciálne).

Predpokladajme, že v každom kroku existujú hodnoty hier; hodnotu hry, ktorá začína v bode $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, budeme označovať $V(x_1, \ldots, x_n)$. Predpokladajme, že v čase $t = 0$ volí prvý hráč kontrolnú premennú $\bar{\boldsymbol{u}}$ a druhý hráč kontrolnú premennú $\bar{\boldsymbol{v}}$. V tomto prípade po veľmi malom časovom intervale Δt sa stavové premenné rovnajú približne hodnote $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$, kde

$$\Delta x_i = f_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})\,\Delta t \tag{6.3}$$

a ak existuje integrálna platba hry, celková platba sa bude rovnať približne

$$p(x_1, \ldots, x_n; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s)\,\Delta t \tag{6.4}$$

Hra pokračuje znova z bodu $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ s dosiahnutou hodnotou platby (6.4). Ak sa v čase Δt použijú optimálne stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$, tak celková platba bude

$$V(\boldsymbol{x}) = p(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r; v_1, \ldots, v_s)\,\Delta t + V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \tag{6.5}$$

Na druhej strane

$$V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \cong V(\boldsymbol{x}) + \sum_i V_i(\boldsymbol{x})\,\Delta x_i$$

kde V_i sú parciálne derivácie V podľa x_i.

Potom podľa (6.3)

$$V(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \cong V(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})\,\Delta t \tag{6.6}$$

Ak dosadíme vzťah (6.6) do vzťahu (6.5) a predpokladáme, že $\bar{\boldsymbol{u}}$ a $\bar{\boldsymbol{v}}$ sú optimálne voľby kontrolných premenných v čase $t = 0$, dostávame

$$V(\boldsymbol{x}) \cong p(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})\,\Delta t + V(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})\,\Delta t$$

Ak $t \to 0$, tak

$$p(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) = 0 \tag{6.7}$$

čo je za predpokladu, že hodnoty hier existujú v každom kroku, a teda môžeme zameniť poradie $\max\limits_u$ a $\min\limits_v$, ekvivalentné so vzťahom

$$\max_u \min_v \left\{ p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \right\} = 0 \tag{6.8}$$

Rovnica (6.7) alebo ekvivalentná rovnica (6.8) sa nazýva základná rovnica. Ide o parciálnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre $V(\boldsymbol{x})$, ktorej musí vyhovovať hodnota hry.

Ak sme získali základnú rovnicu (6.7), môžeme postupovať spätne po trajektóriách diferenciálnych rovníc od konečného povrchu. V prípade, že stavové premenné dosiahli konečný povrch, platí

$$p + \sum_i V_i f_i = 0$$

Ak zderivujeme ľavú stranu tejto rovnice podľa x_j, dostávame sumu výrazov (6.9) až (6.12)

$$p_j + \sum_i V_i f_{ij} \tag{6.9}$$

(kde $p_j = \partial p / \partial x_j$ a $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$)

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} f_i \tag{6.10}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(p + \sum_i V_i f_i\right) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \tag{6.11}$$

$$\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial}{\partial v_l}\left(p + \sum_i V_i f_i\right) \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_j} \tag{6.12}$$

Preskúmajme výraz (6.11) za predpokladu, že kontrolné premenné sú ohraničené konštantami. Vieme, že $\bar{u}_k$ sú alebo vnútri, alebo na hranici intervalu, ktorý ich ohraničuje. Ak je to vnútorný bod, potom

$$\partial\left(p + \sum_i V_i f_i\right) \Big/ \partial u_k = 0$$

pretože $\bar{u}_k$ volíme tak, aby maximalizoval výraz v zátvorkách vo vzťahu (6.8). Ak $\bar{u}_k$ leží na hranici, potom

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} = 0$$

Vidíme, že výraz (6.11) sa rovná nule. Podobne sa rovná nule aj výraz (6.12).

Preskúmajme teraz výraz (6.10). Platí

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

a teda

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} f_i = \sum_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}t} \tag{6.13}$$

Označíme pravú časť výrazu (6.13) $\dot{V}_j$ ($\dot{V}_j$ je derivácia V_j podľa času po trajektórii, ktorá zodpovedá stratégiám $\bar{\boldsymbol{u}}$ a $\bar{\boldsymbol{v}}$). Ak pripočítame túto hodnotu k výrazu (6.9) a výsledok sa bude rovnať nule, dostávame rovnice

$$\dot{V}_j = -\left[p_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) + \sum_{i=1}^{n} V_i f_{ij}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})\right], \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6.14}$$

ktoré spolu so sústavou rovníc

$$\dot{x}_j = f_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}), \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6.15}$$

nazývame rovnice *optimálnej cesty* (alebo rovnice trajektórií) diferenciálnej hry s úplnou informáciou.

Rovnice (6.14) a (6.15) sa nazývajú aj *rovnice charakteristík*. Sú to skutočne charakteristické rovnice základnej rovnice (6.7).

Týchto $2n$ rovníc spolu s hodnotou funkcie F predstavujú formálne riešenie diferenciálnej hry (samozrejme, spolu so základnou rovnicou (6.8), na základe ktorej sa určujú optimálne kontrolné premenné $\bar{\boldsymbol{u}}$ a $\bar{\boldsymbol{v}}$).

V niektorých prípadoch je vhodnejšie použiť opačný čas $\tau = T - t$ namiesto priameho času t, pretože pre sústavy rovníc (6.14) a (6.15) dostávame úlohu s koncovými podmienkami, a nie so začiatočnými.

Rovnice charakteristík majú v opačnom čase τ tvar

$$\dot{V}_j = p_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) + \sum_{i=1}^{n} V_i f_{ij}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) \tag{6.16}$$

$$\dot{x}_j = -f_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) \tag{6.17}$$

Rovnice charakteristík zapísaných v tvare (6.16) a (6.17) sa nazývajú *rovnice charakteristík v regresívnej forme*.

Poznamenávame, že rovnice (6.16) sme získali na základe predpokladu, že ohraničenia kontrolných premenných $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ sú konštantné. Ak to neplatí, tak k výrazu (6.16) musíme pridať členy, ktoré zodpovedajú deriváciám kontrolných premenných.

Určenie začiatočných podmienok

Termín začiatočné podmienky sa vzťahuje na rovnice charakteristík v regresívnej forme. Zaujímajú nás známe hodnoty $\boldsymbol{x}$ a V_x na konečnom povrchu S, ktoré môžeme použiť ako začiatočné podmienky pri integrovaní rovníc (6.16) a (6.17) podľa τ. V mnohých hrách však nemôžeme použiť všetky body množiny S ako kritérium konca hry. Na objasnenie tohto problému preskúmame bod, ktorý je blízko konečného povrchu S. Prvý hráč sa snaží ukončiť hru a druhý oddialiť jej koniec ťahmi, ktoré sú v rozpore s konaním protivníka. Nech $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ je normálový vektor k S v bode $\boldsymbol{x} \in S$, ktorý smeruje dovnútra oblasti E. Ak

$$\max_{\boldsymbol{u}} \min_{\boldsymbol{v}} \sum_{i=1}^{n} v_i f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) > 0 \tag{6.18}$$

potom prvý hráč môže prekaziť rýchle skončenie hry, ktorá sa začína v bodoch dostatočne blízko k S. Ak je vo vzťahu (6.18) znamienko nerovnosti opačné, potom môže druhý hráč dosiahnuť rýchle skončenie hry. Problém spočíva

v tom, aký úžitok budú mať hráči pri takýchto stratégiách. Vysvetlíme to na prípade, keď výhrou je čas skončenia hry. Predpokladajme, že druhý hráč chce hru skončiť a pre prvého hráča je výhodné hru nedokončiť. Potom dostávame, že v prípade, ak platí (6.18), môže prvý hráč oddialiť blížiaci sa koniec hry.

Analogicky pre tie body množiny S, pre ktoré platí vo vzťahu (6.18) opačná nerovnosť, sa druhý hráč usiluje hru skončiť. Pri optimálnej hre sa bude koniec hry realizovať iba v bodoch tejto oblasti.

Množinu bodov $\boldsymbol{x} \in S$, pre ktoré platí nerovnica (6.18), nazývame *neprípustná oblasť*. Krivku ((n-2)-rozmernú varietu) v S, ktorá oddeľuje tieto dve množiny, t. j. takú, pre ktorú platí

$$\max_{\boldsymbol{u}} \min_{\boldsymbol{v}} \sum_{i} v_i f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \tag{6.19}$$

nazývame *hranica prípustnej oblasti*.

Pre mnohé úlohy môže byť prípustnou oblasťou celá množina S. Existuje však veľa prípadov, keď na získanie riešenia musíme najprv určiť prípustnú oblasť.

Začiatočné podmienky potrebné na integrovanie rovníc (6.16) a (6.17) sú hodnoty x_j a V_j ($j = 1, \ldots, n$) v prípustnej oblasti.

Pretože S je povrch (t. j. (n-1)-rozmerná varieta), môžeme ju vyjadriť prostredníctvom n-1 parametrov. Teda

$$x_j = h_j(s_1, \ldots, s_{n-1}), \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6.20}$$

Budeme predpokladať, že tieto funkcie sú diferencovateľné. Vzťahy (6.20) udávajú prvých n začiatočných podmienok. Na získanie hodnôt V_j v prípustnej oblasti vychádzame zo vzťahu $V = F(s_1, \ldots, s_{n-1})$ v S. Ak tento vzťah derivujeme podľa s_k, dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial s_k} = \sum_j V_j \frac{\partial h_j}{\partial s_k}, \qquad k = 1, \ldots, n-1 \tag{6.21}$$

Získali sme teda n-1 rovníc na určenie n neznámych V_j. K týmto rovniciam treba pridať ešte základnú rovnicu (6.7), do ktorej namiesto x_j dosadíme ich hodnoty zo vzťahu (6.20).

Všeobecne môže mať táto sústava rovníc dve riešenia. Problém spočíva v tom, že uvedený prístup neumožňuje rozlíšiť dve strany povrchu S. V konkrétnych prípadoch však vždy môžeme rozhodnúť, ktoré z možných riešení treba akceptovať.

Takto určíme $2n$ začiatočných podmienok na konečnom povrchu S. Po integrovaní rovníc charakteristík (6.16) a (6.17) so získanými začiatočnými podmienkami určíme $2n$ funkcií x_j a V_j s argumentmi

$$\tau, s_1, \ldots, s_{n-1}. \tag{6.22}$$

Potom invertujeme prvých n funkcií x_j a vyjadríme premenné (6.22) ako funkcie x_j. Nakoniec nájdeme hodnotu hry V. Na to stačí dosadiť novozískané funkcie do zostávajúcich n integrálov, získať $V_j(x_1, \ldots, x_n)$ a po integrovaní nájsť V s presnosťou na integračnú konštantu, ktorú určíme pomocou známych hodnôt V na S. Takisto môžeme priamo vypočítať platbu $\int p dt + F$. Na to treba dosadiť x_j a V_j do $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, V_x)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, V_x)$, ktoré získame zo základnej rovnice (6.8) a nájsť optimálne kontrolné premenné. Takýmto spôsobom nájdeme riešenie na základe štandardnej schémy riešenia diferenciálnych rovníc (6.16) a (6.17).

6.1.2 Diferenciálne antagonistické hry bez úplnej informácie

V predchádzajúcej stati sme skúmali diferenciálne hry s úplnou informáciou. Túto úplnú informáciu však nemusia hráči vždy mať. Vo všeobecnom prípade alebo obidvaja hráči nemajú úplnú informáciu, alebo jeden z hráčov ju má a druhý nie. V takýchto prípadoch sú prirodzene metódy riešenia diferenciálnych hier s úplnou informáciou nepoužiteľné a stratégie $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ prvého a druhého hráča nemajú zmysel.

V mnohých prípadoch diferenciálnych hier bez úplnej informácie môže existovať riešenie hry, ktoré spĺňa zvolený princíp optimálnosti. Napríklad pre hru, ktorá nezabezpečuje úplnú informáciu o stave hry pre obidvoch hráčov, môže existovať situácia rovnováhy pre stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$, ako aj hodnota hry.

Postačujúce (alebo nevyhnutné) podmienky existencie riešenia hry v čistých stratégiách $\boldsymbol{u}(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$ hráčov v takomto prípade skúmame pomocou nového pojmu, tzv. *dokonalej informácie*, t. j. takej informácie, pri ktorej hráč pozná stratégiu protivníka vopred pre celú hru. Aj keď je takýto prípad informovanosti málo pravdepodobný (vyskytuje sa v úzkej triede úloh teórie hier), na jeho základe môžeme formalizovať postačujúce (alebo nevyhnutné) podmienky existencie riešenia hry bez úplnej informácie. Na prvý pohľad je to paradoxné, ale ak podrobnejšie preskúmame tento problém uvidíme, že to tak nie je. Skutočne, ak existuje rovnovážna situácia (sedlový bod), tak vzájomná informovanosť hráčov nemá cenu. Hráči môžu jeden druhému oznámiť svoje optimálne stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$ (nezávisle od toho, či dovtedy mali ideálnu informáciu alebo nie), výsledok hry sa tým nezmení. Táto skutočnosť (vlastnosť situácie rovnováhy) sa použije na získanie optimálnych stratégií.

Teda formálne môžeme predpokladať, že obidvaja hráči majú dokonalú informáciu, a za tohto predpokladu hľadať postačujúce (alebo nevyhnutné) podmienky, pre ktoré platí princíp sedlového bodu, t. j. podmienky, keď $\max\limits_{\boldsymbol{u}(t)} \min\limits_{\boldsymbol{v}(t)} = \min\limits_{\boldsymbol{v}(t)} \max\limits_{\boldsymbol{u}(t)}$ pre funkciu platieb, teda podmienky, pri ktorých najnižšia výhra prvého hráča sa rovná najvyššej prehre druhého hráča. Z týchto podmienok určíme optimálne stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$, ktoré sú v tomto zmysle ideálne.

Podstatné je to, že postačujúce (alebo nevyhnutné) podmienky existencie riešenia hry nebudeme formulovať v stratégiách správania jednotlivých hráčov, ale v stratégiách.

Nech je skúmaný proces opísaný sústavou diferenciálnych rovníc zapísaných vo vektorovom tvare

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{6.23}$$

pri začiatočných podmienkach $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, kde $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ je n-rozmerná vektorová stavová funkcia procesu definovaná na intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$ (t_0 — čas začatia a t_1 — čas skončenia procesu), ktorá má tieto vlastnosti:

1. funkcie $x_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) sú spojité na $\langle t_0, t_1 \rangle$ a majú po častiach spojité derivácie;
2. pre každé pevné t vektor $\boldsymbol{x}(t)$ patrí do danej oblasti $B_1(t)$ n-rozmerného vektorového priestoru X.

Vektorové funkcie $\boldsymbol{u}(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$ budeme nazývať *riadenie* sústav P prvého hráča a D druhého hráča.

$\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ je r-rozmerná vektorová funkcia a $\boldsymbol{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_s(t))$ je s-rozmerná vektorová funkcia, ktoré sú definované na intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$ a majú tieto vlastnosti:

1. ich zložky sú spojité na celom intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$ okrem konečného počtu bodov, ktoré môžu byť bodmi nespojitosti prvého rádu;
2. pre každé $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, $\boldsymbol{x} \in B_1(t)$ patrí vektor $\boldsymbol{u}(t)$ do danej množiny $Q_1(t, \boldsymbol{x})$ a vektor $\boldsymbol{v}(t)$ do množiny $Q_2(t, \boldsymbol{x})$.

Podmienky, ktorým musia vyhovovať $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$, definujú množinu $V_1(t)$ prípustných hodnôt $n + r + s$ čísel (x_i, u_j, v_k) pre každé $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ a oblasť prípustných hodnôt t, $\boldsymbol{x}$ z $(n + 1)$-rozmerného priestoru $T \times X$, ako aj V_1 prípustných $n + r + s + 1$ čísel (x_i, u_j, v_k, t) ($i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, r; k = 1, \ldots, s$). Funkcie $f_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ($i = 1, \ldots, n$) sú po častiach spojité na V_1 a pre každé pevné t sú spojité na $V_1(t)$.

Riadenia $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ zvoľme tak, aby optimalizovali nejaké kritérium. Ak sú $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ prvkami dvoch sústav P a D, záujmy ktorých sú v zmysle tohto kritéria antagonistické, budeme takýto riadený proces nazývať *riadený proces za konfliktnej situácie*. Antagonickosť záujmov systémov spočíva v tom, že jeden systém chce dosiahnuť najmenšiu hodnotu kritéria na konci procesu t_1 a druhý systém sa usiluje, aby táto hodnota bola čo najväčšia. Nech sa napríklad systém P usiluje kritérium maximalizovať a systém D sa usiluje toto kritérium minimalizovať. Pre širokú triedu procesov môžeme kritérium zvoliť v tvare

$$I = \int_{t_0}^{t_1} p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, dt + F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) \tag{6.24}$$

Funkcia $p(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je zadaná, po častiach spojitá na V_1 a pre každé pevné

t je spojitá na $V_1(t)$. Funkcia $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$ je spojitá pre všetky $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{x}_1$, kde $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ a $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t_1)$.

Sústava rovníc (6.23), ktorá opisuje riadený proces, oblasť B_1 prípustných hodnôt t, $\boldsymbol{x}$, ako aj množiny prípustných riadení $Q_1(t, \boldsymbol{x})$ a $Q_2(t, \boldsymbol{x})$ sústav P a D sú dané formou apriórnej alebo fundamentálnej informácie o riadenom procese. Táto informácia je vopred známa a pri skúmaní procesu sa nemení. Predpokladáme, že pre obidva systémy P a D existuje fundamentálna informácia.

V teórii hier sa takýto riadený proces nazýva *diferenciálna hra*, antagonistické systémy sa nazývajú *hráči*, stav procesu $\boldsymbol{x}(t)$ sa nazýva *stav hry*, riadenie systémov *čisté stratégie hráčov*, optimalizačné kritérium platba a základná (fundamentálna) informácia sa nazýva *pravidlá hry*.

Zostavili sme teda pravidlá antagonistickej diferenciálnej hry a zároveň určili objekt jej skúmania. Na nájdenie optimálnych stratégií hráčov musíme pre túto hru odvodiť princíp optimálnosti (optimalizačný princíp).

Budeme vychádzať z hľadiska operačného výskumníka, o ktorom predpokladáme, že patrí do systému (hráča) P. Potom na určenie optimálnych stratégií hráčov v antagonistickej diferenciálnej hre s uvedenými pravidlami (bez úplnej informácie) je vhodné prijať nasledujúce tri princípy optimálnosti.

1. Minmaxový princíp:

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}(t)), \boldsymbol{v}(t)) =$$

$$= I_1(t_0, \boldsymbol{x}_0) \qquad (6.25)$$

Prípustné stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$, $\bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{u}(t))$ hráčov P a D nazývame optimálna dvojica stratégií, ak pre ne platí minmaxový princíp (6.25). Tento princíp predpokladá, že hráč P je takticky informovaný, t.j. má informáciu o konkrétnej voľbe stratégie v t hráča D. Hráč D od začiatku do konca hry nemá informácie o konkrétnej voľbe stratégie $\boldsymbol{u}$(t) hráča P. Takúto informáciu hráča P nazývame dokonalá informácia. Vidíme, že z dokonalej informácie hráča P na základe (6.23) vyplýva jeho úplná informácia, teda hráč P v každom časovom okamihu má informáciu o stave hry (ak má ideálnu pamäť)[1]. Opačné tvrdenie neplatí. Optimálnou stratégiou hráča D je taká stratégia, ktorá realizuje najlepší výsledok pri najhoršej stratégii hráča D oproti ideálne informovanému hráčovi P. Najprv zafixujeme stratégiu $\boldsymbol{v}(t)$ hráča D a nájdeme maximálnu hodnotu funkcionály I na množine stratégií $\boldsymbol{u}(t)$ hráča P:

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{v}(t)) = d_1(\boldsymbol{v}(t)) \qquad (6.26)$$

[1] Hráč s ideálnou pamäťou je v teórii hier taký hráč, ktorý si pamätá všetky predchádzajúce kroky a stavy od začiatku.

Optimálnou stratégiou hráča D bude taká stratégia $\bar{\boldsymbol{v}}(t)$, pre ktorú platí

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} d_1(\boldsymbol{v}(t)) = \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{v}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}(t), \bar{\boldsymbol{v}}(t)) =$$

$$= \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I_1(t_0, \boldsymbol{x}_0) \qquad (6.27)$$

Pre takto definovanú stratégiu $\bar{\boldsymbol{v}}(t)$ hráča D nenadobúda funkcionála pre ľubovoľnú stratégiu hráča P hodnotu väčšiu ako I_1 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, preto sa takáto stratégia hráča D nazýva *garantovaná*. Hodnota kritéria I_1 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ je najlepší výsledok, s ktorým môže počítať hráč P, ak je jeho protivníkom „rozumný", ale takticky neinformovaný hráč D.

Stratégie hráčov $\bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}(t))$, $\bar{\boldsymbol{v}}(t)$ a hodnotu kritéria I_1 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ nazývame riešenie hry pri minmaxovom princípe optimálnosti.

2. Maxminový princíp:

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} \inf_{v(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \boldsymbol{u}(t))) =$$

$$= I_2(t_0, \boldsymbol{x}_0) \qquad (6.28)$$

Prípustné stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$, $\bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{u}(t))$ hráčov P a D nazývame *optimálna dvojica stratégií*, ak pre ne platí maxminový princíp (6.28). Tento princíp predpokladá, že hráč P nemá od začiatku do konca hry informáciu o konkrétnej voľbe stratégie $\boldsymbol{v}(t)$ hráča D. Hráč D je takticky informovaný, t.j. má informáciu o konkrétnej voľbe stratégie $\boldsymbol{u}(t)$ hráča P. Takúto informáciu hráča D nazývame *ideálna informácia*. V tomto prípade zafixujeme stratégiu $\boldsymbol{u}(t)$ hráča P a hľadáme minimálnu hodnotu funkcionály I na množine stratégií $\boldsymbol{v}(t)$ hráča D:

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \boldsymbol{u}(t)) = d_2(\boldsymbol{u}(t)) \qquad (6.29)$$

Takticky neinformovaný hráč P si musí zabezpečiť zo svojho hľadiska najlepší (pre hráča D najhorší) výsledok. Preto pre hráča P bude optimálna taká stratégia $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$, pre ktorú platí

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} d_2(\boldsymbol{u}(t)) = \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \boldsymbol{u}(t))) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \boldsymbol{u}(t))) =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = I_2(t_0, \boldsymbol{x}_0) \qquad (6.30)$$

Hodnota kritéria $I_2\,(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ je najlepší výsledok, ktorý môže dosiahnuť hráč D, ak je jeho protivník „rozumný", ale takticky neinformovaný hráč P.

Stratégie hráčov $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$, $\bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}(t))$ a hodnotu kritéria $I_2\,(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ nazývame riešenie hry pri maxminovom princípe optimálnosti.

Postačujúce podmienky existencie optimálnych stratégií hráčov pre maxminový princíp optimálnosti sú analogické postačujúcim podmienkam pre minmaxový princíp optimálnosti. Môžeme ukázať, že platí

$$\Delta(t_0, \boldsymbol{x}_0) = I_1(t_0, \boldsymbol{x}_0) - I_2(t_0, \boldsymbol{x}_0) \geqq 0 \tag{6.31}$$

Skutočne, pre ľubovoľné pevné $\boldsymbol{u}(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$ platí pre dolnú hranicu

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{v}(t) \leqq I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$$

a pre hornú hranicu

$$I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) \leqq \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$$

Teda

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) \leqq \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$$

Pretože ľavá strana nerovnice nezávisí od $\boldsymbol{v}(t)$, dostávame

$$\inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) \leqq \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$$

Pretože pravá strana poslednej nerovnice nezávisí od $\boldsymbol{u}(t)$, dostávame

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) \leqq \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) \tag{6.32}$$

Ak použijeme vzťahy (6.25), (6.28) a (6.32), dostaneme nerovnicu (6.31).

Ak platí $I_2(t_0, \boldsymbol{x}_0) = I_1(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, t.j. platí rovnosť

$$I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}(t)) = I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}(t)), \bar{\boldsymbol{v}}(t))$$

tak vzájomná taktická informovanosť hráčov nemá hodnotu, pretože

$$\Delta(t_0, \boldsymbol{x}_0) = 0$$

Ak

$$I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}(t), v_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}(t))) < I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}(t)), \boldsymbol{v}(t))$$

tak vzájomná informovanosť hráčov má hodnotu, pretože

$$\Delta(t_0, \boldsymbol{x}_0) > 0$$

hráči potrebujú získať taktickú informáciu a usilovať sa utajiť ju pred protivníkom.

Minmaxový a maxminový princíp optimálnosti je charakterizovaný krajným prípadom vzájomnej taktickej informovanosti hráčov. Existuje trieda riadených procesov v konfliktných situáciách, pre ktoré platí tento prípad. Optimalizáciu riadení príslušných systémov môžeme v tomto prípade uskutočniť uvedenými

metódami. Okrem toho umožňujú tieto metódy oceniť vzájomnú taktickú informovanosť systémov.

3. Princíp sedlového bodu:

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) =$$

$$= I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{u}^*(t), \bar{\boldsymbol{v}}^*(t)) = I_3(t_0, \boldsymbol{x}_0) \tag{6.33}$$

Prípustné stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$ hráčov P a D nazývame optimálna dvojica stratégií, ak pre ne platí princíp sedlového bodu (6.33). Tento princíp zapísaný ako vzťah (6.33) nepredpokladá, že obidvaja hráči majú úplnú informáciu. Naopak, v hre s týmto princípom optimálnosti sa predpokladá, že obidvaja hráči nemajú úplnú informáciu, t.j. nepoznajú stav hry v každom časovom okamihu. Okrem toho, prirodzene, predpokladáme, že hráči od začiatku do konca hry nemajú informácie o konkrétnych voľbách stratégií hier protivníka, teda obidvaja hráči nie sú takticky informovaní. Predpokladáme, samozrejme, že obidvaja hráči majú k dispozícii fundamentálnu informáciu, ktorá obsahuje začiatočný stav hry a čas jej skončenia.

Hodnotu $I_3(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ funkcionály (6.24), ktorá zodpovedá optimálnej dvojici stratégií $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$, $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$, nazývame hodnota (cena) hry.

Pri tomto princípe optimálnosti taktická informácia obidvoch hráčov P a D nemá cenu, pretože pre optimálne stratégie platí vzťah (6.33), teda maximálna výhra hráča P sa rovná minimálnej prehre hráča D. Hráči P a D si môžu navzájom oznámiť svoje stratégie $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t)$ a $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t)$, výsledok hry sa tým nezmení (nezávisle od toho, či mali alebo nemali obidvaja hráči dovtedy ideálnu informáciu). Ak vezmeme do úvahy túto vlastnosť, môžeme napísať, že

$$\sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) = \inf_{\boldsymbol{v}(t)\in Q_2} \sup_{\boldsymbol{u}(t)\in Q_1} I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) =$$

$$= I(t_0, \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}_n(t)), \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t))) = I_3(t_0, \boldsymbol{x}_0) \tag{6.34}$$

Ak porovnáme vzťahy (6.33) a (6.34), dostaneme

$$\bar{\boldsymbol{u}}^*(t) = \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}_n(t)); \quad \bar{\boldsymbol{v}}^*(t) = \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t)) \tag{6.35}$$

Z rovníc (6.35) vyplýva, že ak je splnený princíp optimálnosti sedlového bodu, tak formálne (upozorňujeme, že iba formálne!) môžeme predpokladať, že obidvaja hráči majú ideálnu informáciu. Ešte raz zdôrazňujeme, že to vyplýva zo známej vlastnosti, ktorá spočíva v tom, že ak nastáva rovnováha, tak obidvaja hráči si môžu oznámiť navzájom svoje optimálne stratégie pre celú hru vopred, výsledok hry sa tým nezmení.

Stratégie hráčov $\bar{\boldsymbol{u}}^*(t) = \bar{\boldsymbol{u}}_n(t, \bar{\boldsymbol{v}}_n(t))$, $\bar{\boldsymbol{v}}^*(t) = \bar{\boldsymbol{v}}_n(t, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t))$ a hodnotu (cenu) hry $I_3(t_0, \mathbf{x}_0)$ nazývame riešenie hry pri optimalizačnom princípe sedlového bodu.

6.2 HRY S VEKTOROVÝMI FUNKCIAMI PLATIEB

V súvislosti s rozvojom teórie viackriteriálnej optimalizácie sa v posledných rokoch venuje pozornosť aj viackriteriálnym hrám n hráčov, ktoré sa nazývajú aj hry s vektorovými funkciami platieb. Prvý podrobnejší výskum takých hier bol opísaný v [7].

V praktických aplikáciách modelov konfliktných situácií s n účastníkmi (hráčmi) sa môže stať, že účastníci sa riadia viacerými kritériami pri hodnotení výsledkov rozhodnutí. Takéto situácie vznikajú pri rozhodovaní o výstavbe veľkých investičných celkov, napr. energetických diel, kde rôzne skupiny subjektov rozhodovania musia posúdiť rozličné kritériá, ako sú náklady na výstavbu, riešenie problémov znečisťovania ovzdušia, ekologické problémy, ochrana pôdneho a lesného fondu a pod.

Viackriteriálne konfliktné rozhodovacie situácie môžu zahŕňať tak kooperáciu, ako aj konflikt medzi rozličnými skupinami subjektov rozhodovania na rozličných úrovniach. Na riešenie takýchto úloh možno využiť metódy teórie viackriteriálnych hier n hráčov.

Teória viackriteriálnych hier vychádza z princípu jednokriteriálnych hier tak v normálnom tvare, ako aj v tvare charakteristickej funkcie. V literatúre boli navrhnuté viaceré prístupy na riešenie viackriteriálnych hier. Tieto hry možno skúmať priamo v normálnom tvare alebo v tvare charakteristickej funkcie. Okrem toho možno použiť aj proces parametrizácie, ktorý umožňuje upraviť danú viackriteriálnu hru na zodpovedajúcu jednokriteriálnu hru, pre ktorú sú známe koncepcie riešenia.

Uvedieme najprv niektoré základné pojmy a označenia, ktoré sa využívajú v teórii viackriteriálnych hier.

Predpokladajme, že úlohu viackriteriálneho rozhodovania možno opísať takto:

a) množinu rozhodnutí H s prvkami h. Množinu H nazveme priestorom rozhodovania;

b) množinu kritérií, definovaných pre každé rozhodnutie $h \in H$, ktoré možno vyjadriť vektorovou hodnotiacou funkciou $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_r)$. Množinu všetkých možných výsledkov nazveme priestorom výsledkov alebo kritérií a označíme ju $W = \mathbf{w}(H) = \{\mathbf{w}(H) \mid h \in H\}$;

c) preferenčným poriadkom na priestore výsledkov, ktorým sa riadi rozhodovateľ. Potom pre dané $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in W$, výraz $\mathbf{w}^{(1)} > \mathbf{w}^{(2)}$ označuje, že $\mathbf{w}^{(1)}$ je preferované pred $\mathbf{w}^{(2)}$.

Konečným rozhodnutím nazveme také $\mathbf{h}^{(0)} \in H$, že nijaké prípustné $\mathbf{w}'$ nie je preferované pred $\mathbf{w}(h^{(0)})$, t. j. neexistuje $\mathbf{w}' \in W\{\mathbf{w}(\mathbf{h}^{(0)})\}$, že $\mathbf{w}' > \mathbf{w}(h^{(0)})$.

Každému bodu $\mathbf{w}^{(0)} \in W$ možno priradiť takú množinu $D(\mathbf{w}^{(0)})$, že $\mathbf{w} \in \mathbf{w}^{(0)} + D(\mathbf{w}^{(0)}) = \{\mathbf{w}^{(0)} + d \mid d \in D(\mathbf{w}^{(0)})\}$ a $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}^{(0)}$ vtedy a len vtedy, ak $\mathbf{w}^{(0)} > \mathbf{w}$.

Ak $D(\mathbf{w})$ je konvexný kužeľ (t. j. ak $d^{(1)}, d^{(2)} \in D(\mathbf{w})$ a $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, potom aj $\lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} \in D(\mathbf{w})$), tak $D(\mathbf{w})$ sa nazýva kužeľ dominácie pre $\mathbf{w}$.

Súbor $\{D(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in W\}$ nazveme dominačnou štruktúrou úlohy viackriteriálneho rozhodovania.

Nech je daná množina W, dominačná štruktúra $D(\mathbf{w})$ definovaná na W a nech $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in W$. Hovoríme, že $\mathbf{w}^{(2)}$ je dominované $\mathbf{w}^{(1)}$ vtedy a len vtedy, ak $\mathbf{w}^{(2)} > \mathbf{w}^{(1)} + D(\mathbf{w}^{(1)})$ a $\mathbf{w}^{(2)} \neq \mathbf{w}^{(1)}$. Bod $\mathbf{w}^{(0)} \in W$ sa nazýva nedominovaným riešením alebo nedominovaným výsledkom vtedy a len vtedy, ak neexistuje nijaké $\mathbf{w}^{(1)} \in W$, pre ktoré platí, že $\mathbf{w}^{(1)} \neq \mathbf{w}^{(0)}$ a $\mathbf{w}^{(0)} \in \mathbf{w}^{(1)} + D(\mathbf{w}^{(1)})$, t. j. $\mathbf{w}^{(0)}$ nie je dominované nijakým iným výsledkom z W.

Podobne pre priestor rozhodovania H bod $\mathbf{h}^{(0)} \in H$ nazveme nedominovaným riešením alebo rozhodnutím vtedy a len vtedy, ak neexistuje nijaké také $\mathbf{h}^{(1)} \in H$, že $\mathbf{w}(\mathbf{h}^{(1)}) \neq \mathbf{w}(\mathbf{h}^{(0)})$ a $\mathbf{w}(\mathbf{h}^{(0)}) \in \mathbf{w}(\mathbf{h}^{(0)}) + D(\mathbf{w}(\mathbf{h}^{(0)}))$. Množinu všetkých nedominovaných riešení v priestore rozhodovania a v priestore výsledkov označíme $N_H(D(.))$ a $N_W(D(.))$, kde $D(.)$ označuje príslušnú dominačnú štruktúru. Preto je opodstatnené požadovať, aby „dobré" konečné riešenie bolo nedominovaným riešením.

Najprv preskúmame viackriteriálne hry n hráčov v normálnom tvare. Na rozdiel od hry n hráčov v normálnom tvare, opísanej v štvrtej kapitole, predpokladáme, že i-tý hráč má vektorovú funkciu platieb $m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ definovanú na priestore platieb H. Nech i-tý hráč má množinu kritérií $1, 2, \dots, r_i$ a jeho funkcia platieb $m^{(i)}$ je definovaná na $H \subseteq R^{(r_i)}$. Všeobecne kritériá hráčov môžu byť rôzne. Avšak v našom výklade predpokladáme, že kritériá pre všetkých hráčov sú rovnakého typu.

Označme priestor platieb i-tého hráča, ak $M^{(i)} = m^{(i)}(H)$, kde $M^{(i)}$ má rozmernosť r_i. Úplný priestor platieb $M^{(F)}$ má rozmernosť

$$\sum_{i=1}^{n} r_i$$

a je definovaný takto

$$M^{(F)} = m(H) = (m^{(1)}, \dots, m^{(n)})(H) = \{[(m^{(1)}(\mathbf{h})), \dots, (m^{(n)}(\mathbf{h}))] \mid \mathbf{h} \in H\}$$

Príklad 6.1

Nech je daná hra troch hráčov v normálnom tvare. Množiny čistých stratégií hráčov označíme ako

$$J_1 = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}), \qquad J_2 = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}), \qquad J_3 = (j_1^{(3)}, j_2^{(3)})$$

Nech každý hráč má dve kritériá rovnakého typu a matica platieb hry má nasledujúci tvar

$$\begin{array}{c} \\ j_1^{(1)}, j_1^{(2)} \\ j_1^{(1)}, j_2^{(2)} \\ j_2^{(1)}, j_1^{(2)} \\ j_2^{(1)}, j_2^{(2)} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & j_1^{(3)} & & & j_2^{(3)} & \end{array} \\
\begin{pmatrix} (6,2) & (2,3) & (2,5) & (2,2) & (1,3) & (3,5) \\ (4,3) & (2,2) & (2,4) & (2,4) & (2,3) & (4,7) \\ (3,0) & (5,4) & (1,3) & (1,1) & (0,0) & (6,5) \\ (6,3) & (5,2) & (4,4) & (1,0) & (4,3) & (4,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Pre každú voľbu čistých stratégií z $\prod_{i=1}^{3} J_i$ táto matica platieb určuje šesťrozmerný vektor platieb, v ktorom prvé dve súradnice predstavujú platby prvému hráčovi, ďalšie dve platby druhému hráčovi a posledné dve platby tretiemu hráčovi. Napríklad, ak prvý hráč volí stratégiu $j_2^{(1)}$, druhý stratégiu $j_1^{(2)}$ a tretí hráč volí stratégiu $j_1^{(3)}$, platba prvého hráča pre prvé kritérium je 3 a pre druhé kritérium 0, platba druhého hráča pre prvé kritérium je 5 a pre druhé kritérium 4, platba tretieho hráča pre prvé kritérium je 1 a pre druhé kritérium 3.

V tomto prípade H je súbor pravdepodobnostných rozdelení na 8-prvkovej množine

$$\prod_{i=1}^{3} J_i = \{j_1^{(1)} j_1^{(2)} j_1^{(3)}, j_1^{(1)} j_1^{(2)} j_2^{(3)}, \ldots, j_2^{(1)} j_2^{(2)} j_3^{(3)}\}$$

Teda v tomto prípade

$$H = \left\{ \boldsymbol{h} \in R^{(8)} \middle| \boldsymbol{h} \geq 0, \sum_{i=1}^{8} h_i = 1 \right\}$$

Úplný priestor platieb je šesťrozmerný a je definovaný ako

$$M^{(F)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i \boldsymbol{m}^{(i)} \middle| \boldsymbol{h} \in H \right\}$$

kde $\boldsymbol{m}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 8$ sú šesťrozmerné vektory platieb.

Na riešenie takejto hry s vektorovou funkciou platieb možno použiť niekoľko prístupov. V práci [7] sú tieto prístupy rozdelené do troch skupín. Ide o prístupy vychádzajúce z riešenia v úplnom priestore platieb, koncepcie, ktoré vychádzajú z priestoru platieb každého hráča a koncepcie, ktoré vyplývajú z redukcie (úpravy) viackriteriálnej hry na jednokriteriálnu.

Predpokladajme, že hráči sa dohodnú, že budú používať niektorú koncepciu z úplného priestoru platieb $M^{(F)}$. Každý hráč implicitne skúma všetky kritériá pre ostatných hráčov v procese riešenia. Tento prístup je ekvivalentný tomu, že $M^{(F)}$ pokladáme za priestor platieb pre jednokriteriálnu hru v normálnom tvare, v ktorej počet hráčov je rovný sume r_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), pričom r_i je počet kritérií

i-tého hráča. Inými slovami, platba pre každé kritérium daného hráča sa interpretuje ako samostatná platba rovnakého hráča.

Ako jednu z koncepcií riešenia tejto úlohy môžeme použiť kompromisné riešenie. Takú úlohu možno sformulovať takto.

Nech $\boldsymbol{m}^{(0)}$ je vektor maximálnych platieb (v literatúre sa nazýva utopistický bod hry) a $R_p(\boldsymbol{m})$ sú funkcie definované ako

$$R_p(\boldsymbol{m}) = \left[\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{m}_i^{(0)} - \boldsymbol{m}_i) \right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pre } p \geqq 1$$

$$R\boldsymbol{m}) = \max \{(\boldsymbol{m}_i^{(0)} - \boldsymbol{m}_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$$

Tieto funkcie používajú l_p-metriku (pozri [33]) ako mieru vzdialenosti medzi $\boldsymbol{m}^{(0)}$ a $\boldsymbol{m}$.

Definícia 6.1

Bod $\boldsymbol{m}^{(p)}$, ktorý minimalizuje funkciu $R_p(\boldsymbol{m})$ definovanú na $M^{(F)}$, nazveme kompromisným riešením hry n hráčov s vektorovou funkciou platieb v normálnom tvare s parametrom p.

Možno ľahko dokázať, že ak $M^{(F)}$ je konvexná množina, potom $\boldsymbol{m}^{(p)}$ dáva jednoznačné riešenie.

V hre z predchádzajúceho príkladu utopistický bod hry $\boldsymbol{m}^{(0)} = [(6,4), (5,4), (6,7)]$. Preto pre nájdenie kompromisného riešenia s parametrom $1 \leqq p \leqq \infty$ v úplnom priestore hry minimalizujeme funkciu

$$R_p(\boldsymbol{m}) = [(6 - m_1)^{(p)} + (4 - m_2)^{(p)} + (5 - m_3)^{(p)} +$$

$$+ (4 - m_4)^{(p)} + (6 - m_5)^{(p)} + (7 - m_6)]^{\frac{1}{p}}$$

pričom predpokladáme, že $\boldsymbol{m} \in M^{(F)}$ a $\boldsymbol{m} \geqq \boldsymbol{m}^{(+)}$, kde $\boldsymbol{m}^{(+)}$ sú minimálne prijateľné platby (podobne ako garančné platby v jednokriteriálnych hrách n hráčov opísané v 4. kapitole).

Poznamenávame, že všeobecne sa hráči môžu dohodnúť, že budú používať konkrétnu dominačnú štruktúru na $M^{(F)}$ a voliť jednu stratégiu spomedzi nedominovaných riešení vzhľadom na túto dominačnú štruktúru.

Predpokladajme, že každý hráč určuje svoju dominačnú štruktúru $D(.)$ na svojom priestore platieb $M^{(i)}$. H_0 označme množinu takých rozhodnutí, že pre $\boldsymbol{h} \in H_0$ je $\boldsymbol{m}^{(i)}(\boldsymbol{h})$ nedominované vzhľadom na $D_i(.)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ak je množina nedominovaných riešení N konvexná, môžeme ju pokladať za utopistický bod pre každého hráča. Riešením hry budú také platby, ktoré minimalizujú sumu vzdialenosti od utopistického bodu každého hráča.

Nakoniec ukážeme ako postupujeme pri redukcii platby každého hráča na jedno kritérium. Predpokladajme, že každý hráč určí vektor váh

$$\boldsymbol{t}^{(i)}, \left(t_k^{(i)} = 0, \sum_{k=1}^{r_i} t_k^{(i)} = 1\right)$$

pre svoje kritériá. Rozmernosť vektora $\boldsymbol{t}^{(i)}$ je r_i. Tento vektor môžeme pokladať za odhad pravdepodobnostného rozdelenia výsledkov, ktoré nastanú. Preto funkcia platieb i-tého hráča bude

$$\sum_{k=1}^{r_i} t_k^{(i)} m_k^{(i)}$$

t. j. predstavuje strednú hodnotu pre pravdepodobnostné rozdelenie $\boldsymbol{t}^{(i)}$. Týmto zredukujeme viackriteriálnu hru na jednokriteriálnu.

Zrejmé je, že hráč zvyčajne nemôže presne určiť vektor váh $\boldsymbol{t}$. Môže však určiť množinu vektorov váh, povedzme z kužeľa Λ_i. Potom každá voľba n vektorov váh $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$, kde $\boldsymbol{t}_i \in \Lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, dáva jednokriteriálnu hru n hráčov v normálnom tvare.

Ak sa hráči riadia rovnakými typmi kritérií $1, \ldots, r_k$, môžu sa dohodnúť, že budú používať rovnaký vektor váh $\boldsymbol{t}$ alebo množinu takýchto vektorov váh. Potom pre každé $\boldsymbol{t} \in \Lambda$ funkcia platieb i-tého hráča

$$\sum_{k=1}^{r} t_k m_k^{(i)}$$

transformuje viackriteriálnu hru na jednokriteriálnu.

V predchádzajúcom príklade pre $\boldsymbol{t} \in L = \{\boldsymbol{t} = (t_1, t_2) | \boldsymbol{t} \geqq 0 \text{ a } t_1 + t_2 = 1\}$ položme $t_2 = 1 - t_1$. Potom matica platieb parametrizovanej hry bude

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \quad & j_1^{(3)} & \quad & \quad & j_2^{(3)} & \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} j_1^{(1)}, j_1^{(2)} \\ j_1^{(1)}, j_2^{(2)} \\ j_2^{(1)}, j_1^{(2)} \\ j_2^{(1)}, j_2^{(2)} \end{array} &
\begin{pmatrix}
2 + 4t_1 & 3 - 2t_1 & 5 - 2t_1 & 2 & 2 - t_1 & 5 - 2t_1 \\
4 - t_1 & 2 & 4 - 2t_1 & 4 - 2t_1 & 3 - t_1 & 7 - 3t_1 \\
3t_1 & 4 + t_1 & 3 - 2t_1 & 0 & 0 & 6 - t_1 \\
3 + 3t_1 & 2 + 3t_1 & 4 & t_1 & 3 + t_1 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Okrem hier n hráčov s vektorovou funkciou v normálnom tvare možno skúmať aj hry s vektorovou funkciou platieb v tvare charakteristickej funkcie.

Hovoríme, že viackriteriálna hra n hráčov v tvare charakteristickej funkcie sa skladá z množiny hráčov $P = \{1, \ldots, n\}$ a vektorovej charakteristickej funkcie $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$. Každá zložka tejto funkcie v_k, $k = 1, \ldots, r$ predstavuje charakteristickú funkciu hry definovanú v štvrtej kapitole. Pripomenieme, že (0, 1)-normalizáciou každej funkcie v_k, $k = 1, \ldots, r$ dostávame vektorovú (viackriteriálnu) charakteristickú funkciu $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$.

Príklad 6.2

Nech máme hru troch hráčov s vektorovou funkciou platieb, zadanou pomocou charakteristickej funkcie $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ takto:

$$\boldsymbol{v}(\{1\}) = (2, 3), \ \boldsymbol{v}(\{2\}) = (1, 1), \ \boldsymbol{v}(\{3\}) = (2, 4)$$

$$\boldsymbol{v}(\{1, 2\}) = (5, 6), \ \boldsymbol{v}(\{1, 3\}) = (5, 8), \ \boldsymbol{v}(\{2, 3\}) = (4, 5)$$

$$\boldsymbol{v}(\{1, 2, 3\}) = (11, 10)$$

Predpokladajme, že túto hru môžeme odvodiť z príslušnej dvojkriteriálnej hry v normálnom tvare, pričom v_1 určuje platbu každej koalície pre prvé kritérium a v_2 platbu každej koalície pre druhé kritérium.

Z poznatkov štvrtej kapitoly vyplýva, že (0, 1)-normalizovaný tvar tejto hry môžeme zapísať takto:

$$\boldsymbol{u}(\{1\} = (0, 0), \ \boldsymbol{u}(\{2\}) = (0, 0), \ \boldsymbol{u}(\{3\}) = (0, 0)$$

$$\boldsymbol{u}(\{1, 2\}) = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \ \boldsymbol{u}(\{1, 3\}) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \ \boldsymbol{u}(\{2, 3\}) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{u}(\{1, 2, 3\}) = (1, 1)$$

Keďže s každou viackriteriálnou charakteristickou funkciou $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ je spojená (0, 1)-normalizovaná charakteristická funkcia $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, môžeme s nimi spojiť nasledujúce jednokriteriálne funkcie:

1. $\bar{v}$, definovanú pomocou $\bar{v}(S) = \max\limits_{1 \leqq k \leqq r} v_k(S)$, pre všetky $S \in P$.
2. $\bar{u}$, definovanú pomocou $\bar{u}(S) = \max\limits_{1 \leqq k \leqq r} u_k(S)$, pre všetky $S \in P$, kde $\bar{u}$ je (0, 1)-normalizáciou $\bar{v}$.

Pomocou parametrizácie môžeme viackriteriálnu charakteristickú funkciu hry upraviť na jednokriteriálnu, pre ktorú poznáme koncepcie riešenia. Môžeme to uskutočniť podobne ako parametrizáciu viackriteriálnej hry v normálnom tvare.

Predpokladajme, že hráči sa dohodnú, že budú používať vektor váh $\boldsymbol{t}$ alebo množinu takýchto vektorov váh

$$L = \left\{\boldsymbol{t} R^{(r)} \middle| \boldsymbol{t} \geqq 0, \sum_{k=1}^{r} t_k = 1\right\}$$

pomocou ktorých možno parametrizovať viackriteriálnu charakteristickú funkciu na jednokriteriálnu.

Opíšeme metódu priamej parametrizácie viackriteriálnej charakteristickej funkcie. Okrem toho poznamenávame, že jednokriteriálnu charakteristickú funkciu možno získať aj parametrizáciou príslušnej viackriteriálnej hry v normálnom tvare, z ktorej je táto odvodená (pozri [7]).

Pre daný vektor $\boldsymbol{t} \in L$ môžeme definovať parametrizovanú hru v_t takto

$$v_t(S) = \boldsymbol{t}v(S) = \sum_{k=1}^{r} t_k v_k(S), \qquad \text{pre všetky } S \in P$$

Označme (0, 1)-normalizovaný tvar v_t ako u_t. Môžeme postupovať aj tak, že najprv normalizujeme u na v, a potom parametrizujeme u. V takom prípade získame $(u)_t$. Ukážeme, že všeobecne $u_t \neq (u)_t$.

Vráťme sa k príkladu 6.2. Nech $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$. Položme $t_2 = 1 - t_1$. Potom dostaneme

$$v_t(\{1\}) = 3 - t_1,\ v_t(\{2\}) = 1,\ v_t(\{3\}) = 4 - 2t_1$$

$$v_t(\{1, 2\}) = 6 - t_1,\ v_t(\{1, 3\}) = 8 - 3t_1,$$

$$v_t(\{2, 3\}) = 5 - t_1$$

$$v_t(\{1, 2, 3\}) = 10 - t_1$$

Ak normalizujeme v_t, dostaneme

$$u_t(\{1, 2\}) = \frac{2}{3 + 4t_1}, \qquad u_t(\{1, 3\}) = \frac{1}{3 + 4t_1}, \qquad u_t(\{2, 3\}) = \frac{t_1}{3 + 4t_1}$$

Na druhej strane parametrizáciou (0, 1)-normalizovanej funkcie u dostaneme

$$(u)_t(\{1, 2\}) = 1 - \frac{2}{3}t_1, \qquad (u)_t(\{1, 3\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t_1, \qquad (u)_t(\{2, 3\}) = \frac{1}{6}t_1$$

Vidíme, že napríklad pre $\boldsymbol{t} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je $u_t(\{1, 2\}) = \frac{2}{5}$. Naproti tomu $(u)_t(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$.

Zrejmé je, že na riešenie takto získaných jednokriteriálnych hier možno použiť známe koncepcie riešenia.

Iný prístup k riešeniu hier n hráčov s vektorovou charakteristickou funkciou platieb spočíva v zovšeobecnení známych koncepcií riešenia jednokriteriálnych hier. Potom napríklad zovšeobecnením C jadra hry je viackriteriálne C jadro hry.

Predpokladajme, že každé kritérium u_k viackriteriálnej (0, 1)-normalizovanej charakteristickej funkcie $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$ predstavuje možné hodnoty koalícií pre rozličné výsledky hry. Z poznatkov štvrtej kapitoly je zrejmé, že nijaká koalícia nemá námietky proti nijakej imputácii z C jadra každej charakteristickej funkcie.

Definícia 6.2

Viackriteriálnym C jadrom hry s charakteristickou funkciou u nazývame prienik C jadier funkcií u_k, ktorý označíme

$$MC(\boldsymbol{u}) = \bigcap_{k=1}^{r} C(u_k)$$

Veta 6.1

Pre (0, 1)-normalizovanú hru v tvare charakteristickej funkcie $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$

$$MC(u) = C((\bar{u}))$$

Dôkaz

Z predchádzajúcej definície je zrejmé, že

$$\boldsymbol{x} \in MC(u) = \bigcap_{k=1}^{r} C(u_k)$$

vtedy a len vtedy, ak $x(N) = 1$ a $x(S) \geqq u_k(S)$, pre $k = 1, \ldots, r$ a $S \in N$. To je ekvivalentné tomu, že $x(N) = 1$ a $x(S) \geqq \max u_k(S) = (\bar{u}_k)(S)$. Teda $\boldsymbol{x} \in C(\bar{u})$.

Vrátime sa znovu k predchádzajúcemu príkladu. Viackriteriálne C jadro hry určíme takto:

$$MC(u) = \left\{\boldsymbol{x} \in R^3 \,|\, \boldsymbol{x} \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 \geqq 1,\right.$$
$$\left. x_1 + x_3 \geqq \frac{1}{2},\ x_2 + x_3 \geqq \frac{1}{6}\right\}$$

Môžeme ľahko zistiť, že v tomto prípade $MC(u) \neq \emptyset$. Na základe predchádzajúcej vety môžeme definovať dominačnú štruktúru pre hru s charakteristickou funkciou u, ktorá dáva viackriteriálne C jadro hry. Potom pre každú koalíciu $S \in N$

$$D_S(x) = \begin{cases} \Lambda_S, & \text{ak } x(S) \leqq \max\{u_k(S)\} \\ \{0\} & \text{v ostatných prípadoch} \end{cases}$$

kde kužeľ $\Lambda_S = \{d \in X \,|\, d_i < 0 \text{ pre všetky } i \in S \cup \{0\}\}$.

Možno dokázať, že viackriteriálne C jadro hry sa rovná prieniku nedominovaných riešení $N(D_{S_i})$.

Z literatúry je známe (pozri napr. [7]), že na riešenie hier n hráčov s vektorovými funkciami platieb v tvare charakteristickej funkcie možno použiť aj iné známe koncepcie riešenia, napr. Shapleyho hodnotu hry alebo N jadro hry, a to tak, že tieto koncepcie aplikujeme na príslušnú jednokriteriálnu hru s charakteristickou funkciou ($\bar{u}$), vytvorenou z pôvodnej viackriteriálnej hry.

6.3 TEÓRIA HIER A SPOLOČENSKÉ VEDY

Aplikácie teórie hier sa u nás často redukovali na problémy optimálneho ekonomického rozhodovania. Pôvodným zámerom autorov tejto teórie však bolo vytvoriť matematický aparát na kvantitatívnu aj kvalitatívnu analýzu zložitých spoločenských javov, ktorými sa zaoberajú spoločenské vedy. Ide najmä o analýzu správania výrobcov v rôznych trhových štruktúrach a analýzu volebného rozhodovania a hlasovacích mechanizmov v demokratickej spoločnosti. Uvedieme niektoré aplikácie z tejto oblasti.

6.3.1 Teória duopolu

Duopolom nazýva ekonomická teória takú trhovú štruktúru, v ktorej stranu ponuky reprezentujú dvaja výrobcovia, ktorí úplne kontrolujú ponuku na trhu daného výrobku. Tým, že majú vplyv na celkový objem ponuky, môžu ovplyvňovať aj cenu. Správanie výrobcov v takejto trhovej štruktúre je predmetom pozornosti tzv. mikroekonomickej teórie. Jedným z analytických nástrojov mikroekonomickej teórie pri skúmaní duopolu je teória hier.

Vychádzame z nasledujúceho modelu duopolu:

Dvoch výrobcov, ktorí kontrolujú ponuku na trhu daného výrobku, označíme $i = 1, 2$. Nech

q_1 je objem výroby prvého výrobcu,

q_2 — objem výroby druhého výrobcu.

Funkcia

$$p = f(q_1 + q_2)$$

udáva závislosť ceny od ponuky, t.j. pre každú úroveň ponuky $q_1 + q_2$ udáva cenu, pre ktorú bude táto ponuka zodpovedať dopytu. Ide o klesajúcu funkciu (s rastom ponuky cena klesá). Predpokladáme, že každý z výrobcov pozná závislosť medzi ponukou a cenou. Potom

$$R_1(q_1, q_2) = pq_1 = f(q_1 + q_2)\, q_1$$

je obrat prvého výrobcu a

$$R_2(q_1, q_2) = pq_2 = f(q_1 + q_2)\, q_2$$

je obrat druhého výrobcu. Predpokladáme, že zisková funkcia je diferencovateľná.

Pojem hraničného obratu (marginal revenue) definuje ekonomická teória takto: Hraničným obratom i-tej duopolistickej firmy ($i = 1, 2$) nazývame veličinu

$$\frac{\partial R_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = f(q_1, q_2) + q_i \frac{\partial f(q_1, q_2)}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i}$$

Táto veličina udáva, ako sa zmení obrat i-tej firmy v dôsledku zmeny jej výstupu o jednotku. Keďže funkcia $p = f(q_1, q_2)$ je klesajúca, platí

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} < 0$$

teda

$$p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} < p$$

a hraničný obrat duopolistickej firmy je menší ako cena ňou vyrábaného výrobku.

Označme ďalej

$C_1(q_1)$ nákladovú funkciu prvého výrobcu,

$C_2(q_2)$ nákladovú funkciu druhého výrobcu.

Predpokladáme, že nákladové funkcie sú diferencovateľné. Hraničnými nákladmi i-tej firmy ($i = 1, 2$) nazýva ekonomická teória veličinu

$$\frac{\mathrm{d}C_i(q_i)}{\mathrm{d}q_i}$$

ktorá udáva, ako sa zmenia celkové náklady i-tej firmy v dôsledku zväčšenia jej výroby o jednotku. Nákladová funkcia je rastúca, teda hraničné náklady sú kladné.

Ziskové funkcie obidvoch výrobcov majú za daných predpokladov tvar

$$z_i(q_1, q_2) = pq_1 - C_1(q_1) = f(q_1 + q_2)\, q_1 - C_1(q_1) = R_1(q_1, q_2) - C_1(q_1)$$

pre prvého výrobcu a

$$z_2(q_1, q_2) = pq_2 - C_2(q_2) = f(q_1 + q_2)\, q_2 - C_2(q_2) = R_2(q_1, q_2) - C_2(q_2)$$

pre druhého výrobcu. Zisk každého z výrobcov závisí nielen od jeho správania, ale aj od správania jeho duopolistického konkurenta.

Treba odpovedať na otázku, aká ponuka a cena sa vytvára na duopolistickom trhu.

Cournotovo riešenie

AUGUSTINE COURNOT bol francúzsky matematik, ktorý sa ako prvý ešte v prvej polovici 19. storočia zaoberal modelmi trhových štruktúr [19]. Jeho riešenie problému duopolu vychádza z predpokladu, že každá z dvoch duopolistických firiem maximalizuje nezávisle od druhej svoj zisk, pričom predpokladá rovnaké správanie aj druhej firmy. Ide teda o typický problém nekooperatívnej teórie hier: ak jednotlivých duopolistov pokladáme za hráčov a ich ziskové funkcie interpretujeme ako funkcie platieb, potom stav rovnováhy na duopolistickom trhu je vlastne rovnovážnym bodom v zmysle NASHA.

Nevyhnutnými podmienkami pre rovnovážny bod sú

$$\frac{\partial z_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial R_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} - \frac{d(C_1 q_1)}{dq_1} = 0 \tag{6.36}$$

$$\frac{\partial z_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial R_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} - \frac{dC_2(q_2)}{dq_2} = 0 \tag{6.37}$$

teda hraničný obrat každej firmy sa v stave rovnováhy rovná hraničným nákladom

$$\frac{\partial R_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = \frac{dC_i(q_i)}{dq_i}$$

Z rovníc (6.36) a (6.37) môžeme odvodiť tzv. reagenčné funkcie obidvoch duopolistov; z rovnice (6.36) funkciu

$$q_1 = \varphi_1(q_2)$$

ktorá udáva, aký bude rovnovážny výstup q_1 prvej firmy pre ľubovoľný výstup q_2 druhej firmy; z rovnice (6.37) funkciu

$$q_2 = \varphi_2(q_1)$$

ktorá udáva, aký bude rovnovážny výstup q_2 druhej firmy pre ľubovoľný výstup q_1 prvej firmy.

Rovnováhu na duopolistickom trhu určíme vyriešením sústavy rovníc (6.36) až (6.37).

Príklad 6.3

Nech

$$p = f(q_1 + q_2) = 100 - 0{,}5(q_1 + q_2) \tag{6.38}$$

$$C_1(q_1) = 5q_1 \tag{6.39}$$

$$C_2(q_2) = 0{,}5q_2 \tag{6.40}$$

potom

$$z_1(q_1, q_2) = 95q_1 - 0{,}5q_1^2 - 0{,}5q_1q_2 \tag{6.41}$$

$$z_2(q_1, q_2) = 100q_2 - q_2^2 - 0{,}5q_1q_2 \tag{6.42}$$

V danej situácii sú nevyhnutnými podmienkami pre rovnovážny bod

$$\frac{\partial z_1}{\partial q_1} = 95 - q_1 - 0{,}5q_2 = 0 \tag{6.43}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial q_2} = 100 - 0{,}5q_1 - 2q_2 = 0 \tag{6.44}$$

Z rovnice (6.43) odvodíme reagenčnú funkciu prvej firmy

$$q_1 = \varphi_1(q_2) = 95 - 0{,}5q_2 \tag{6.45}$$

a z rovnice (6.44) reagenčnú funkciu druhej firmy

$$q_2 = \varphi_2(q_1) = 50 - 0{,}25q_1 \tag{6.46}$$

Ak vyriešime sústavu (6.43) až (6.44), dostaneme stav rovnováhy na duopolistickom trhu

$$q_1^* = 80, \quad q_2^* = 30, \quad z_1^* = 3\,200, \quad z_2^* = 900$$

teda súhrnný objem ponuky na našom trhu bude

$$q^* = q_1^* + q_2^* = 110$$

čomu zodpovedá rovnovážna cena

$$q^* = 45$$

Kooperatívne riešenie

Vzájomná závislosť veľkosti zisku firiem na duopolistickom trhu môže viesť zúčastnené firmy k úvahám o spolupráci pri formovaní ponuky. Namiesto nezávislého postupu a konkurencie môžu preskúmať spoločný postup a dohovoriť sa o maximalizácii celkového zisku:

$$z(q_1, q_2) = z_1(q_1, q_2) + z_2(q_1, q_2) = f(q_1 + q_2)(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

Predpokladom dohody je však znovurozdelenie spoločného zisku tak, aby žiadna z firiem nemala stratu v porovnaní so samostatným postupom.

Príklad 6.4

V modeli (6.38) až (6.40) preskúmame vlastnosti kooperatívneho správania duopolistických firiem. Spoločný zisk v tomto prípade bude

$$z(q_1, q_2) = z_1(q_1, q_2) + z_2(q_1, q_2) = 100(q_1 + q_2) - 0{,}5(q_1 + q_2)^2 - 5q_1 - 0{,}5q_2^2$$

Nevyhnutné podmienky pre maximalizáciu spoločného zisku majú tvar

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0$$

Vyriešime príslušnú sústavu rovníc a dostaneme zodpovedajúci stav rovnováhy na trhu so spolupracujúcimi duopolistami:

$$q_1^* = 90, \quad q_2^* = 5, \quad z^* = 4525$$

teda súhrnný objem ponuky bude v tomto prípade

$$q^* = q_1^* + q_2^* = 95$$

čomu zodpovedá rovnovážna cena

$$p^* = 52{,}5$$

V porovnaní s Cournotovým riešením v tomto prípade duopolistické firmy dodajú na trh menej produkcie za vyššiu cenu, pričom celkový zisk vzrastie zo 4 100 na 4 275. Všimnime si však, že v kooperatívnom riešení duopolistického trhu sa získané výhody nemusia rovnomerne rozdeliť medzi obidve firmy. V našom prípade prvá firma zvýšila (v porovnaní so samostatným postupom) svoj zisk z 3 200 na 4 275, zatiaľ čo zisk druhej firmy poklesol z 900 na 250. Na to, aby dohodu o spoločnom postupe rešpektovali obidve firmy, musí dôjsť k dohode o prerozdelení zisku tak, aby spoločný postup nebol pre obidve firmy menej výhodný ako samostatný postup. Dohoda o deľbe zisku preto musí vyhovovať nasledujúcej podmienke:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4\,525 \\ x_1 \qquad &\geqq 3\,200 \\ x_2 &\geqq 900 \end{aligned}$$

Vidíme, že ide vlastne o kooperatívnu hru, v ktorej je dohoda medzi účastníkmi daná C jadrom tejto hry.

Kooperatívne správanie duopolistov je zo spoločenského hľadiska menej priaznivé ako Cournotovo riešenie (nižšia úroveň ponuky a vyššia cena pri nezmenených technologických podmienkach). Z toho vyplýva negatívny vzťah spoločnosti k dohodám medzi firmami s monopolistickým postavením na trhu, prejavujúci sa vo vyspelých štátoch v legislatívnom zákaze uzatvárania takýchto dohôd.

Stackelbergovo riešenie

Všeobecnejší prístup k analýze správania duopolistov sformuloval nemecký ekonóm H. von STACKELBERG. Jeho model vychádza z nasledujúcej úvahy:

Jedna z dvoch firiem na duopolistickom trhu môže postupovať tak, že sa prispôsobuje stratégii druhej firmy — prenechá jej vykonanie rozhodnutia o objeme výroby, a potom zvolí svoju stratégiu podľa príslušnej reagenčnej funkcie. Takúto firmu nazýva STACKELBERG „nasledovníkom". Druhá firma predpokladá, že jej konkurent je „nasledovníkom", a správa sa podľa tohto predpokladu, t. j. pri svojom rozhodovaní vychádza z toho, že konkurent volí stratégiu podľa svojej reagenčnej funkcie. Takúto firmu nazýva STACKELBERG „vodcom". Ak je „vodcom" napr. prvá firma, potom táto firma maximalizuje ziskovú funkciu

$$z_1(q_1, \varphi_2(q_1))$$

ktorá je už funkciou iba jednej premennej q_1, teda objemu jej vlastného výstupu. Za predpokladu, že druhá firma je nasledovník, volí táto firma svoju stratégiu podľa reagenčnej funkcie

$$q_2 = \varphi_2(q_1)$$

ktorá je funkciou premennej q_1.

Každá z dvoch duopolistických firiem môže preskúmať efekt vzťahov vodcovstva a nasledovníctva z hľadiska zisku a posúdiť, či je pre ňu výhodnejšie byť vodcom alebo nasledovníkom. Výsledkom tejto analýzy je jedna z nasledujúcich štyroch možností:

1. Prvá firma chce byť vodcom a druhá firma nasledovníkom.
2. Prvá firma chce byť nasledovníkom a druhá firma vodcom.
3. Obidve firmy chcú byť nasledovníkmi.
4. Obidve firmy chcú byť vodcami.

Prvé dva prípady sú vnútorne konzistentné a vedú k stavu rovnováhy — pre jednu z firiem je výhodnejšie byť vodcom, pričom túto výhodu realizuje iba vtedy, keď je jej konkurent nasledovníkom, pričom pre druhú z firiem je výhodnejšie byť nasledovníkom, pričom túto výhodu realizuje iba vtedy, keď je jej konkurent vodcom.

Tretí prípad vedie ku Cournotovmu riešeniu. Každý z konkurujúcich duopolistov sa prispôsobuje správaniu druhého a stabilným stavom je rovnovážny bod príslušnej nekooperatívnej hry.

Štvrtý prípad sa nazýva Stackelbergovou nerovnováhou. Voľba vodcovstva obidvoma firmami je vnútorne rozporná, pretože vychádza z neuskutočnených predpokladov (vodca realizuje svoju výhodu iba vtedy, keď sa jeho konkurent správa ako nasledovník). Stackelbergovu analýzu objasníme na príklade.

Príklad 6.5

Vráťme sa k nášmu modelu (6.38) až (6.40). Vykonáme najprv analýzu obidvoch duopolistov z hľadiska vodcovstva.

Predpokladajme, že prvá firma je vodcom. Potom jej ziskovú funkciu

$$z_1(q_1, q_2) = 95q_1 - 0{,}5q_1^2 - 0{,}5q_1q_2$$

upravíme dosadením reagenčnej funkcie (6.46) druhej firmy:

$$z_1(q_1, \varphi_2(q_1)) = 95q_1 - 0{,}5q_1^2 - 0{,}5q_1(50 - 0{,}25q_1) = 70q_1 - 0{,}375q_1^2$$

Nájdeme maximum tejto funkcie:

$$\frac{dz_1}{dq_1} = 70 - 0{,}75q_1 = 0$$

$$q_1^* = 93{,}333, \quad z_1^* = 3266{,}667$$

Nech je teraz vodcom druhá firma. Jej ziskovú funkciu

$$z_2(q_1, q_2) = 100q_2 - q_2^2 - 0{,}5q_1q_2$$

upravíme dosadením reagenčnej funkcie 6.45 prvej firmy:

$$z_2(\varphi_1(q_2), q_2) = 100q_2 - q_2^2 - 0{,}5(95 - 0{,}5q_2)\,q_2 = 52{,}5q_2 - 0{,}75q_2^2$$

Nájdeme maximum:

$$\frac{dz_2}{dq_2} = 52{,}5 - 1{,}5q_2 = 0$$

$$q_2^* = 35, \quad z_2^* = 918{,}75$$

Analýzou duopolistov z hľadiska nasledovníctva zistíme:

Ak je prvá firma nasledovníkom, potom (za predpokladu, že druhá firma je vodcom) jej výstup určíme z reagenčnej funkcie (6.45) dosadením $q_2^* = 35$

$$q_1^* = 95 - 0{,}5q_2^* = 77{,}5$$

pričom

$$z_1^* = 3\,001{,}125$$

Ak je druhá firma nasledovníkom, potom (za predpokladu, že prvá firma je vodcom) jej výstup určíme z reagenčnej funkcie (6.46) dosadením $q_1^* = 93{,}33$

$$q_2^* = 50 - 0{,}25q_1^* = 26{,}667$$

pričom

$$z_2^* = 155{,}555$$

Rozborom týchto výsledkov zistíme, že v danom prípade sa obidve firmy domnievajú, že je pre ne výhodné správať sa ako vodca. Dostávame teda stav Stackelbergovej nerovnováhy. Celková ponuka na duopolistickom trhu v tomto prípade bude

$$q^* = q_1^* + q_2^* = 77{,}5 + 26{,}667 = 104{,}167$$

s rovnovážnou cenou

$$p^* = 47{,}92$$

Porovnanie s trhom dokonalej konkurencie

Na trhu dokonalej konkurencie výrobcovia nemajú možnosť ovplyvňovať ceny. Porovnajme výsledky analýzy duopolu s výsledkami, ktoré by nastali vtedy, ak by sa obidve duopolistické firmy správali ako dokonale konkurenčné firmy. V tomto prípade cena vystupuje pre výrobcu ako daný parameter a celkový obrat i-tej firmy ($i = 1, 2$) sa rovná

$$R_i(q_i) = pq_i$$

Hraničný obrat

$$\frac{dR_i(q_i)}{dq_i} = p = f(q_1 + q_2)$$

sa v tomto prípade rovná cene a podmienkami pre maximalizáciu zisku je rovnosť hraničného obratu s hraničným nákladom (pozri napr. [2]). V rovnakej nákladovej situácii budú teda podmienky pre maximalizáciu zisku obidvoch firiem takéto:

$$f(q_1 + q_2) = \frac{dC_i(q_i)}{dq_i}$$

Príklad 6.6

Stav rovnováhy na skúmanom trhu (za predpokladu, že sa obidvaja výrobcovia budú správať ako dokonalé konkurenčné firmy) určíme z podmienok:

$$100 - 0{,}5(q_1 + q_2) = 5$$

$$100 - 0{,}5(q_1 + q_2) = q_2$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme

$$q_1^* = 185, \quad q_2^* = 5, \quad q^* = 190, \quad p^* = 5$$

Porovnaním s výsledkami analýzy duopolu vidíme, že konkurenčné firmy sa správajú zo spoločenského hľadiska priaznivejšie ako všetky typy duopolistických firiem.

Svojím modelom duopolu Cournot viac ako 100 rokov pred vznikom teórie hier sformuloval prvý model konfliktnej situácie typu herných modelov a vyriešil ho v súlade s pojmom rovnovážneho bodu nekooperatívnej teórie. Jeho práca inšpirovala množstvo ďalších štúdií súčasnej teórie hier, venovaných analýze trhových štruktúr. Priamym rozvinutím uvedených prístupov sú modely tzv. oligopolu, trhovej štruktúry, v ktorej stranu ponuky reprezentuje niekoľko výrobcov s nezanedbateľným vplyvom na celkovú ponuku, a tým aj na cenu. Teória oligopolu aplikuje modely hier n hráčov a vedie k zaujímavým problémom najmä z hľadiska kooperatívnej teórie (súhrnný výklad prístupov teórie hier k analýze trhových štruktúr obsahuje napr. [19]). Ukazuje sa, že tvorivé aplikácie teórie hier môžu obohatiť modernú ekonomickú teóriu.

6.3.2 Modely volebného rozhodovania

Vyspelá spoločnosť vyžaduje organizáciu, určité pravidlá a mechanizmy, systémy arbitráže, ktoré umožňujú hľadať kompromisy medzi jednotlivými záujmami a realizovať rovnováhu medzi záujmami jednotlivcov, skupín a spoločnosti, uviesť do súladu tendenciu k maximalizácii individuálnych užitočností a možností spoločnosti ako celku.

Jedným z aktuálnych problémov spoločenského života sú volebné a hlasovacie systémy a pravidlá, ktorých vyjasnenie a osvojenie je predpokladom demokratickej samosprávy. Ďalej ide o demokratické pravidlá rozhodovania o variantných projektoch, napr. v práci zastupiteľských zborov, o pravidlá uzatvárania dohôd a kompromisov, dosahovania konsensu v rozhodovaní, o analýzu vznikajúcich spoločenských štruktúr a oceňovanie vplyvu a sily ich jednotlivých zložiek, prognózu výsledkov riešenia vznikajúcich konfliktov.

Rámec týchto pravidiel je daný určitou sociálnou filozofiou a etikou, akceptovanou v danej spoločnosti. Intuitívne je však zrejmé, že na základe prijatej axiomatiky spoločenského správania tieto otázky súvisia s celým radom netriviálnych kvantitatívnych problémov, ktoré možno modelovať a analyzovať. Problematikou modelovania a kvantitatívnej analýzy spoločenských rozhodovacích situácií sa zaoberá disciplína, ktorú nazývame sociologickou informatikou. S jednotlivými jej prvkami sa môžeme stretnúť v takých disciplínach, ako je politológia, právna informatika, v ekonomickej oblasti mikroekonomická teória a teória blahobytu.

Teória hier je jednou z matematických disciplín, ktoré sú vhodné na modelovanie a analýzu problémov sociologickej informatiky. Uvedieme aspoň niekoľko názorných príkladov z tejto oblasti.

„Volebný paradox" Arrowa

Aby sme ukázali, že spoločenské rozhodovacie procesy nie sú triviálne a že ani v demokratickej spoločnosti nevyrieši všetky problémy jednoduché väčšinové hlasovanie, uvedieme dva príklady. Predpokladajme, že skupina jednotlivcov rozhoduje hlasovaním o niekoľkých variantoch (napríklad rôzne projekty, alebo variantní kandidáti vo voľbách), z ktorých treba vybrať jeden. Predpokladáme, že každý jednotlivec má nejaké individuálne usporiadanie na množine variantov (preferuje určitý variant pred iným). O variantoch sa hlasuje podľa nasledujúcich pravidiel: Zvíťazí variant, ktorý získa nadpolovičnú väčšinu hlasov. Na dosiahnutie absolútnej väčšiny možno hlasovanie uskutočniť v dvoch kolách. Ak v prvom kole získa niektorý z variantov nadpolovičnú väčšinu, hlasovanie sa skončí, v opačnom prípade postúpia do druhého kola varianty, ktoré sa umiestnili v prvom a druhom poradí. Potom zvíťazí variant, ktorý získa nadpolovičnú väčšinu v druhom kole.

Príklad 6.7

Predpokladáme, že 5 voličov rozhoduje o výbere jedného z troch variantov A, B a C. Možné usporiadanie preferencií jednotlivých voličov uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

1	2	3	4	5
A	A	B	B	C
B	C	C	C	A
C	B	A	A	B

Vyššie umiestnenie variantu v tabuľke zodpovedá vyššej preferencii (napríklad prvý volič preferuje A pred B a B pred C). Podľa uvedených preferencií získa v prvom kole dva hlasy variant A, dva hlasy B a jeden hlas variant C. Do druhého kola postupujú varianty A a B. Po vylúčení variantu C vyzerá tabuľka preferencií takto:

1	2	3	4	5
A	A	B	B	A
B	B	A	A	B

Nadpolovičnú väčšinu hlasov v druhom kole získa variant A. Celkovo možno konštatovať, že výsledkom hlasovania bolo spoločenské usporiadanie preferencií: A sa preferuje pred B a B sa preferuje pred C. Keď však analyzujeme prvú tabuľku preferencií, nie je celkom jasné, prečo by mal byť variant C zo spoločenského hľadiska najhorší (štyria voliči ho kladú na druhé miesto a jeden na prvé miesto, zatiaľ čo traja voliči kladú variant B na posledné miesto a dvaja kladú na posledné miesto variant A). Na prvý pohľad prijateľné a demokratické rozhodovacie procedúry nie sú intuitívne celkom uspokojivé.

Výsledky príkladu 6.7 vyvolávajú určité pochybnosti o racionalite zdanlivo samozrejmých pravidiel. Nasledujúci príklad ilustruje možnosť zjavne paradoxných situácií, ktoré môžu nastať v súvislosti s volebnými a hlasovacími procedúrami.

Príklad 6.8

Nech usporiadanie preferencií 5 voličov, pokiaľ ide o varianty A, B a C vyzerá takto:

1	2	3	4	5
A	A	C	C	B
B	B	A	B	C
C	C	B	A	A

V súlade s vyššie uvedenými pravidlami získajú v prvom kole najviac hlasov varianty A a C, ktoré postúpia do druhého kola. Po vylúčení variantu B vyzerá tabuľka preferencií takto:

1	2	3	4	5
A	A	C	C	C
C	C	A	A	A

V druhom kole získa nadpolovičnú väčšinu variant C, teda použitý postup vedie k spoločenskému usporiadaniu variantov: C pred A a A pred B. Analýzou preferencií však zistíme, že absolútna väčšina preferuje A pred B (voliči 1, 2 a 3); absolútna väčšina preferuje B pred C (voliči 1, 2 a 5); absolútna väčšina preferuje C pred A (voliči 3, 4 a 5). Ide o tzv. Arrowov volebný paradox: pri väčšinovom rozhodovaní môže nastať situácia, že spoločenské preferencie nie sú tranzitívne, teda z „A je lepšie ako B" a „B je lepšie ako C" nevyplýva, že „A je lepšie ako C".

Arrowov volebný paradox ukazuje, že otázka konštrukcie hlasovacích a volebných pravidiel, ktoré by vylúčili možnosť logicky protirečivého usporiadania variantov, ktoré sú predmetom spoločenského rozhodovania, je zaujímavým a doteraz otvoreným problémom teórie rozhodovania. Zaoberá sa ním tzv. teória skupinového rozhodovania, ktorá je súčasťou teórie hier a ktorej základ položil Arrow (pozri [2]).

Problém volebných koalícií

Predpokladajme, že niekoľko politických strán a hnutí uvažuje o účasti vo voľbách založených na proporcionálnom systéme zastúpenia s diskrimináciou menšinových zoskupení (na to, aby strana či hnutie získali mandáty, musia dostať najmenej p % z celkového počtu odovzdaných hlasov). Taktikou malých strán, ktoré nemajú šancu získať samostatným postupom toto minimálne percento hlasov, je združovať sa do volebných koalícií a získať požadované minimum hlasov spoločným postupom. Vzniká otázka výberu koaličných partnerov a deľby miest na kandidátke.

Nech $i = 1, 2, \ldots, n$ sú politické strany, ktoré uvažujú o koaličnej spolupráci. Nech ďalej na základe prieskumu verejnej mienky je a_i odhad počtu hlasov, ktoré vo voľbách získa i-ta strana, a_0 je celkový počet voličov, p je minimálne percento hlasov, ktoré treba získať s ohľadom na pravidlo vylúčenia menšinových zoskupení a b je počet hlasov potrebných na získanie jedného mandátu. Za predpokladu 100% účasti voličov musí za zoskupenie, ktoré chce získať mandáty, hlasovať aspoň int $(p \,.\, a_0/100) + 1$ voličov, kde $\mathrm{int}(a)$ je celá časť čísla a.

Označme $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ množinu strán a $S \subseteq I$ jej podmnožiny, teda volebné koalície. Problém volebných koalícií možno sformulovať ako kooperatívnu hru s charakteristickou funkciou:

$$v(S) \begin{cases} = 0 \text{ ak } \sum_{i \in S} a_i < \mathrm{int}(p \,.\, a_0/100) + 1 \\ = \mathrm{int}(\Sigma\, a_{i_{i \in S}}/b) \text{ v opačnom prípade} \end{cases} \tag{6.47}$$

Táto charakteristická funkcia udáva počet mandátov, ktorých získanie príslušná koalícia očakáva.

Použitie aparátu kooperatívnej teórie hier umožní skúmať problémy tvorby takýchto koalícií. Predpokladajme napríklad, že vznikne koalícia $\varkappa$, ktorá opodstatnene predpokladá zisk v $(\varkappa)$ mandátov. Potom problém deľby mandátov medzi jednotlivými zúčastnenými stranami možno riešiť na základe analýzy pojmu C jadra kooperatívnej hry. Nech x_i je počet miest pridelených na spoločnej kandidátke i-tej strane. Rozdelenie mandátov by malo zodpovedať celočíselnému riešeniu sústavy

$$\sum_{i \in \varkappa} x_i = v(\varkappa)$$

$$\sum_{i \in \varkappa} x_i \geqq v(S) \qquad \text{pre } S \subset \varkappa$$

$$x_i > v(i)$$

Príklad 6.9

Nech $I = \{1, 2, 3\}$, $p = 5\,\%$, $a_0 = 1\,000\,000$, $b = 20\,000$, $a_1 = 15\,000$, $a_2 = 25\,000$, $a_3 = 40\,000$. Podľa vzorcov (6.47) dostaneme charakteristickú funkciu

$$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 0,\ v(\{1, 3\}) = 2,\ v(\{2, 3\}) = 3$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 4$$

Za predpokladu vzniku koalície $\varkappa = I$ (teda všetky rokujúce strany sa spoja do jednej koalície) môže deľba mandátov vychádzať zo sústavy

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_2 \qquad &\geqq 0 \\
x_2 + x_3 &\geqq 3 \\
x_1 \qquad + x_3 &\geqq 2 \\
x_1 \qquad\qquad &> 0 \\
x_2 \qquad\quad &> 0 \\
x_3 &> 0
\end{aligned}$$

Táto sústava má celočíselné riešenie

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 2$$

teda základom dohody o koaličnej spolupráci uvedených troch strán môže byť dohoda o deľbe mandátov na kandidátke tak, aby na prvých 4 miestach kandidátky figuroval jeden kandidát prvej strany, jeden kandidát druhej strany a dvaja kandidáti tretej strany. Toto rozdelenie vychádza z predbežného odhadu podpory voličov jednotlivých strán a z potreby motivovať účasť strán v koalícii (napr. prvá strana bude na kandidátke zastúpená jedným kandidátom, hoci prínos jej hlasov nestačí na získanie mandátu, bez jej účasti v koalícii by však všetky strany koalície nemali nádej na získanie 4 mandátov).

Model volebných koalícií vychádza zo značných zjednodušení: nie je napr. reálne predpokladať 100% účasť voličov, počet získaných hlasov jednotlivých strán pravdepodobne závisí aj od zloženia koalícií, do ktorých tieto strany vstúpia a pod. Tieto zjednodušenia však možno odstrániť (napr. použitím kvalifikovaného odhadu účasti voličov na voľbách alebo definovaním funkcie závislosti predpokladaného počtu hlasov od účasti v koalíciách, vychádzajúceho zo špeciálnych prieskumov verejnej mienky) a použiť kooperatívnu teóriu hier na voľbu vhodnej predvolebnej stratégie.

6.4 ĎALŠIE SMERY ROZVOJA TEÓRIE HIER

Teória hier ako vedná disciplína sa v posledných rokoch rýchlo rozvíja. Dokazuje to aj množstvo článkov a monografií vydávaných v mnohých krajinách sveta.

V oblasti konečných hier dvoch hráčov je teória dobre rozpracovaná a ich rozvoj prakticky ukončený. V maticových hrách sa v súčasnosti výskum sústre-

ďuje na hľadanie efektívnych metód riešenia. Z poznatkov druhej kapitoly je zrejmé, že existujúce metódy riešenia maticových hier sú všeobecne veľmi výpočtovo náročné, najmä pre hry s veľkými maticami platieb. Preto sa výskum v tejto oblasti sústreďuje na riešenie hier s maticami platieb špeciálneho typu. Predpokladá sa, že daného typu nemusí byť len samotná matica platieb, ale aj niektoré jej submatice. Medzi matice tohto typu patria napr. diagonálne matice, blokovo diagonálne matice, kvázicyklické matice. Pre hry s takýmito maticami platieb sú známe efektívne metódy riešenia. Podrobnejší prehľad o metódach riešenia maticových hier s maticami platieb špeciálneho typu možno nájsť v [70].

Okrem toho sa v tejto oblasti venuje pozornosť aj približným metódam riešenia maticových hier. Tieto metódy sú z výpočtového hľadiska efektívnejšie ako exaktné metódy a ich použitie je oprávnené najmä pri riešení praktických úloh veľkých rozmerov.

Problém nájdenia efektívnych metód riešenia pretrváva aj v oblasti bimaticových hier. Lemkeho metóda, ktorá je v súčasnosti najefektívnejšou na nájdenie rovnovážnych bodov v bimaticovej hre, je takisto výpočtovo náročná. Preto ďalší rozvoj v tejto oblasti je zameraný na nájdenie efektívnych metód určenia rovnovážnych bodov v maticových hrách veľkých rozmerov.

Situácia je odlišná pre nekonečné hry dvoch hráčov. Tu sú teoreticky rozpracované len niektoré typy hier, ako napr. hry na jednotkovom štvorci, konvexné hry, konkávno-konvexné hry a hry s voľbou časového momentu. Teóriu nekonečných hier dvoch hráčov nemožno rozpracovať všeobecne pre ľubovoľné typy takýchto hier. Preto v súčasnosti je výskum v tejto oblasti zameraný na riešenie typov hier s funkciami platieb konkrétnych vlastností.

Hry n hráčov sú v súčasnosti menej rozpracované ako konečné hry dvoch hráčov. Preto do popredia vystupuje ďalší výskum teórie hier n hráčov, ktorý spočíva v odhalení nových koncepcií riešenia a metódach ich riešenia.

Pre hry n hráčov v normálnom tvare možno všeobecne prijať koncepciu riešenia rovnovážneho bodu (podľa NASHA). Aj keď je známa existencia rovnovážneho bodu v zmiešaných stratégiách pre konečnú hru n hráčov v normálnom tvare, hlavný problém zostáva v nájdení rovnovážneho bodu pre prípad, ak n je väčšie ako 3. Existujúce metódy hľadania rovnovážnych bodov sú výpočtovo náročné aj pre hry troch hráčov. Preto ďalší výskum teórie hier n hráčov v normálnom tvare je zameraný na nájdenie efektívnych metód určenia rovnovážnych bodov. Teoreticky nie je doriešený ani problém, ako postupovať v prípade, keď existuje viac rovnovážnych bodov.

Pre hry n hráčov v tvare charakteristickej funkcie je situácia komplikovaná tým, že v súčasnosti existuje veľa koncepcií ich riešenia (základné sú opísané v štvrtej kapitole a ďalšie sú navrhnuté v zozname literatúry). Pritom nemožno jednoznačne určiť, ktorá koncepcia riešenia je „najlepšia". V každej z nich možno nájsť niektoré prednosti, ako aj nedostatky. Okrem toho vznikajú ťažkosti aj v nájdení riešenia podľa niektorých z týchto koncepcií pre hry, v ktorých počet hráčov je väčší ako 3.

Spomedzi novších koncepcií riešenia hier n hráčov v tvare charakteristickej funkcie uvedieme aspoň koncepciu ψ stabilnosti, homojadra hry a monojadra hry. Ďalším smerom rozvoja kooperatívnych hier je zdokonalenie pojmu charakteristickej funkcie hry tak, aby vyjadrovala závislosť platby koalície nielen od jej zloženia a veľkosti, ale aj od existujúcej koaličnej štruktúry, t. j. od rozdelenia ostatných hráčov do koalície. Okrem toho sa uvažuje aj o možnej zmene pojmu koaličnej štruktúry tak, že sa predpokladá možnosť účasti hráčov v rôznych koalíciách, teda keď koaličná štruktúra nie je disjunktná. Podrobnejší prehľad o ďalšom rozvoji teórie hier n hráčov možno nájsť v [70] a [69].

Rozvoj teórie hier zahŕňa aj ďalšie triedy hier. Niektoré z nich sme v krátkosti opísali v tejto kapitole. Okrem nich existujú aj iné triedy hier. Medzi ne patria aj stochastické hry a metahry. Najjednoduchšie stochastické hry sú konečné hry dvoch hráčov, v ktorých prvky matice platieb sú náhodné premenné. Ako stochastické možno skúmať aj iné typy hier. Všeobecný model stochastickej hry dvoch hráčov je opísaný v [30].

Zaujímavé aplikácie poskytuje teória tzv. metahier. Teória metahier skúma modely konfliktných situácií podobných hrám, ktoré možno formálne opísať pomocou modelov teórie hier. Tieto sa však môžu odlišovať od skutočných hier tým, že hráči môžu, alebo nemusia poznať užitočnosti (platby) jeden druhého, ďalej nemusia vedieť, aké ťahy môže používať protivník a pod. Takéto modely, ktorých formálna matematická definícia sa neodlišuje od hry, predstavujú zmiešané rozšírenie hry na inú hru, odlišnú od pôvodnej rozmernosťou. Táto úprava neuberá na všeobecnosti, avšak znamená, že explicitne neskúmajú zmiešané stratégie, ale len čisté. Pri analýze skúmaných modelov treba brať do úvahy teóriu racionality (racionálneho správania hráčov). V metahrách sa však uvažuje s metateóriou správania.

Empiricky môžeme teóriu metahier objasniť na jednoduchom príklade. Majme hru dvoch hráčov (nemusí to byť hra s nulovým súčtom platieb), kde každý hráč má dve čisté stratégie A a B a každý z nich pozná preferenčný poriadok štyroch možných výsledkov (A, A), (A, B), (B, A) a (B, B). Ak hráči hrajú takú hru niekoľkokrát za sebou, vzniká otázka, ako možno predpovedať ich správanie v priebehu hry, teda akú možnú voľbu čistých stratégií možno očakávať v danej partii hry.

Nech matica platieb (bimatica) takej hry je daná takto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (4, 4) & (1, 6) \\ (6, 1) & (2, 2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Z teórie racionálneho správania hráčov (pozri štvrtú kapitolu) vyplýva, že

jediný stabilný výsledok bude (**B**, **B**), čo je Nashov rovnovážny bod. Avšak z matice platieb vidno, že výsledok (**A**, **A**) je lepší pre obidvoch hráčov než výsledok (**B**, **B**). Vzniká otázka, či môže byť aj tento výsledok stabilný a kedy. Môžeme ľahko zistiť, že ak by sa hráči dohodli na používaní stratégií A, jeden z nich by mohol túto dohodu porušiť (ak by nebola záväzná a jej porušenie sankcionované) a voliť stratégiu B a tak získať najvyššiu výhru. V teórii metahier sa postupuje tak, že z pôvodnej hry sa odvodí nová hra, nazývaná metahra. V nej prvý hráč má dve stratégie A a B ako predtým a druhý hráč má štyri stratégie (počet zobrazení (A, B) na (A, B)). V takej hre sa potom skúmajú stabilné výsledky. Metahry sú podrobnejšie skúmané v [24].

Nakoniec treba povedať, že teória hier je tesne spojená s teóriou užitočnosti. Preto aj rozvoj teórie hier závisí od rozvoja teórie užitočnosti. V tejto práci sme neopísali základné pojmy teórie užitočnosti. Avšak implicitne sme predpokladali, že výsledkom rozhodovania v konfliktnej situácii pre každého účastníka je istý stupeň uspokojenia jeho požiadaviek alebo úžitku (platby). Základným predpokladom v takých rozhodovacích situáciách bolo, že racionálni účastníci vedeli, ktoré výsledky preferujú pred inými. Avšak problémy spojené s meraním úžitku sme explicitne neskúmali. Výsledok rozhodovania v konfliktnej situácii sme opisovali veľkosťou platby. Preto v našej terminológii výsledok rozhodovania pre daného hráča bol tým lepší, čím vyššia bola jeho platba.

Avšak zo skúsenosti je známe, že motív účasti v hre môže byť rozličný. V niektorých hrách (napr. v šachu) výsledky rozhodnutí môžeme merať jednoducho vyhlásením, ktorý z hráčov vyhral a ktorý prehral. Potom úžitok z takej hry možno merať pocitom uspokojenia z výhry nad protivníkom. Avšak v súťažných hrách o veľmajstra taká miera hodnotenia nadobúda zrejme iný zmysel. V iných hrách výsledky rozhodnutí možno vyjadrovať bodmi úspechu výhry partie hry, pričom výsledné počty bodov na konci série partií hry merajú relatívnu schopnosť prejavenú hráčmi. Nakoniec výsledky rozhodnutí môžu byť merané určitými peňažnými platbami, ktoré hráči dostávajú alebo platia.

Pri analýze modelov rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti sme implicitne predpokladali, že výsledok rozhodovania možno merať nejakou rovnakou užitočnosťou pre všetkých účastníkov (hráčov) konfliktnej situácie. Na zjednodušenie úvah možno predpokladať, že ide o peňažné platby, ktoré možno vyjadriť v peňažných jednotkách a užitočnosť spojená s rozhodovaním predstavuje úžitkovú hodnotu peňazí, pričom sa predpokladá, že táto je rovnaká pre všetkých účastníkov.

Avšak už v jednoduchých modeloch, ktoré možno zapísať ako maticové hry, kde jeden hráč (prvý) vyhráva určitú sumu peňazí a druhý ju prehráva, nie je celkom jasné, či užitočnosti tejto sumy sú priamo protikladné pre oboch hráčov. Napríklad, ak prvý hráč je bohatý a druhý hráč je chudobný, prvý môže nechať druhého vyhrať určitú sumu. Teda v dôsledku rozličnej finančnej situácie hráčov alebo rozličných psychologických vzťahov[1] rovnaké peňažné sumy môžu mať pre nich rôznu užitočnosť.

Problémy merania užitočnosti ešte viac narastajú, ak predpokladáme, že platby hráčov sa nedajú vyjadriť v peniazoch. V takých prípadoch daná platba môže mať veľkú hodnotu pre jedného hráča, ale prakticky nijakú hodnotu pre druhého hráča.

Z týchto poznámok vyplýva, že pre dôkladnú analýzu hier a správania hráčov v procese rozhodovania treba skúmať aj pojem osobnej užitočnosti, ktorú hráč pripisuje výsledkom svojich rozhodnutí. Zrejmé je, že v konfliktnej situácii najdôležitejším okamihom je kvantitatívne ocenenie voľby variantov alebo stratégií hráčmi, t. j. priradenie výsledku každému rozhodnutiu určitého čísla užitočnosti tohto rozhodnutia. Toto možno formálne vyjadriť pomocou funkcie užitočnosti, čo súčasne určuje aj kritérium, podľa ktorého hráči prijímajú rozhodnutia v hre.

Problémy spojené s oceňovaním alebo meraním užitočnosti rozhodovania skúma teória užitočnosti. Teórii užitočnosti, ako samostatnej vednej disciplíne, boli v literatúre venované rozsiahle monografie a mnohé články. Vzťahy medzi teóriou hier a teóriou užitočnosti sú podrobnejšie opísané v [33] a [70].

[1] Z hľadiska vplyvu psychologických vzťahov na výsledok hry treba rozlišovať rozličné psychologické vzťahy hráčov k funkcii užitočnosti. Z tohto hľadiska rozlišujeme napr. vzťahy objektívne, hazardné, opatrné, obyčajné, vzťahy chudáka a boháča. Im zodpovedajú príslušné funkcie užitočnosti. Podrobnejšie sú tieto problémy preskúmané v [16].

LITERATÚRA

1. Amvrosenko, V. V.: Uskorenije schodimosti metoda Browna rešenija matričnych igr. In: Ekonomika i matematičeskije metody, 1965, č. 4.
2. Arrow, K. J.: Social Choice and Individual Values. New York, Wiley 1951.
3. Aumann, R.: Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies. Journal of Mathematical Economics, 1974, č. 4.
4. Aumann, R.—Maschler, M.: The Bargaining Set for Cooperative Games. In: Advances in Game Theory, Princeton University Press 1964.
5. Aumann, R.—Schapley, L. S.: Values of Non-Atomic Games. Princeton, Princeton University Press 1974.
6. Berczi, A.: Problems in Managerial Operations Research. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1969.
7. Bergstresser, K.—Yu, P. L.: Domination Structures and Multicriteria Problems in N-Person Games. Austin, University of Texas, CSS 234, 1975.
8. Bondareva, O. N.: O teoretiko-igrovych modeľach v ekonomike. Leningrad, Izd. LGU 1974.
9. Brown, G. W.: Iterative Solutions of Games by Fictious Play. In: Activity Analysis of Produktion and Allocation. New York, Wiley 1951.
10. Blackwell, D.—Girshick, M. A.: Teorie her a statistického rozhodování. Praha, Academia 1964.
11. Cassidy, R. G.—Field, C. A.—Kirby, M. J.: Random Payoff Games I, II. Pittsburg, Carnegie Mellon University 1970.
12. Dantzig, G. B.: Lineárne programovanie a jeho rozvoj. Bratislava, SVTL 1966.
13. Dantzig, G. B.: Linear Programming under Uncertainty. Management Science, 1955, č. 1.
14. Danskin, J. M.: Fictious Play for Continuous Games. Naval Research Logistic Quarterly, 1954, č. 1.
15. Davis, M.—Maschler, M.: The Kernel of a Cooperative Game. Naval Research Logistic Quarterly, 1966, č. 3.
16. Dresher, M.: Games of Strategy. Theory and Applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1961.
17. Fishburn, P.: Decision and Value Theory. New York, Wiley 1964.
18. Fishburn, P.: Utility Theory for Decision Making. New York, Wiley 1970.
19. Friedman, J. W.: Oligopoly and the Theory of Games. Amsterdam, North Holland 1977.
20. Germejer, J. B.: Igry s neprotivopoložnymi interesami. Moskva, Izd. Nauka 1976.
21. Germejer, J. B.: Teória operačnej analýzy. Bratislava, Alfa 1977.
22. Hamala, M.: Nelineárne programovanie. Bratislava, Alfa 1972.
23. Havrda, J.: Matematické programování. Praha, SNTL 1972.
24. Howard, N.: The Theory of Meta Games. In: General Systems, 1966, zv. II.
25. Charnes, A.: Constrained Games and Linear Programming. Proceedings of the National Academy of Science, 1983, č. 7.
26. Charnes, A.—Cooper, W. W.: Chance Constrained Programming. Management Science, 1959, č. 1.

27. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Modely riadenia a priemyselné aplikácie lineárneho programovania. Bratislava, Veda 1966.
28. CHARNES, A.—KEANE, M.—RAIKE, W.: Zero-Sum Chance Constrained Games. Theory of Probability and Applications, 1968, č. 13.
29. CHARNES, A.—SORENSEN, S.: Constrained N-Person Games. Austin, University of Texas CSS 89 1972.
30. CHARNES, A.—SORENSEN, S.: Mathematical Theory of Coalition and Competition in Resource Development. Austin, University of Texas 1972.
31. CHOBOT, M.: Teória hier. Bratislava, ES VŠE 1973.
32. CHOBOT, M.: Teória hier a rozhodovania. Bratislava, ES VŠE 1986.
33. CHOBOT, M.—TURNOVCOVÁ, A.: Modely rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti. Bratislava, Alfa 1980.
34. ISAACS, R.: Differential Games. New York, Wiley 1985.
35. JÜTTLER, H.: Linejnaja modeľ s neskoľkimi celevymi funkcijami. Ekonomika i matematičeskije metody, 1967, č. 3.
36. KARLIN, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. London, Pergamon Press 1959.
37. KUKUŠKIN, N. S.—MOROZOV, V. V.: Teorija neantagonističeskich igr. Moskva, Izd. MGU 1984.
38. LAŠČIAK, A. a kol.: Optimálne programovanie. Bratislava, Alfa 1983.
39. LEMKE, C.: Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. Management Science, 1965, č. 7.
40. LUCAS, W. F.: Solution for Four Person Games in Partition Form. SIAM, 1965, č. 13.
41. LUCE, R. D.—RAIFFA, H.: Games and Decisions. New York, Wiley 1957.
42. MAŇAS, M.: Teorie her a optimální rozhodování. Praha, SNTL 1974.
43. MAŇAS, M.: Teorie her a její ekonomické aplikace. Praha, SPN 1983.
44. MAŇAS, M.: Kontrola kvality z hlediska teorie her. Ekonomicko-matematický obzor, 1966, č. 3.
45. MAŇAS, M.: Hry proti p-inteligentním hráčům. In: Konference o matematických metodách v ekonomii, Praha, EML ČSAV 1972.
46. MCKINSEY, J. C.: Introduction to the Theory of Games. New York, McGraw Hill 1952.
47. NEUMANN, J. von — MORGENSTERN, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, Princeton University 1953.
48. NIKAIDO, H.—ISODA, K.: Note on Non-Cooperative Convex Games. Pacific Journal of Mathematics, 1955, č. 5.
49. PACIUKOV, V. P.: Diferenciaľnyje igry pri različnoj informirovannosti igrokov. Moskva, Sovetskoje radio 1976.
50. PARTHASARATHY, T.—RAGHAVAN, T. E.: Some Topics in Two-Person Games. New York, American Elsevier 1971.
51. Primenenije teorii igr v vojennom dele. Moskva, Sovetskoje radio 1961.
52. RUEFLI, T. W.: Programming Solution to Some Classes of Infinite Games. Austin, University of Texas 1969.
53. SHAPLEY, L. S.: A Value for N-Person Games. In: Contributions to the Theory of Games, zv. 2. Princeton, Princeton University Press 1953.
54. SCHMEIDLER, D.: The Nucleolus of a Characteristic Function Game. Siam J. Appl. Mathe., 1968, č. 6.
55. SHAPLEY, L. S.—SNOW, R. N.: Basic Solutions of Discrete Games. In: Contributions to the Theory of Games, zv. 1. Princeton, Princeton University 1950.
56. THRALL, L.—LUCAS, W.: Games in Partition Function Form. Naval Research Logistic Quarterly, 1963, č. 2.

57. TUCKER, A. W.—LUCAS, W.: Contributions to the Theory of Games, zv. 4. Princeton, Princeton University Press 1959.
58. TURNOVEC, F.: Ekonomické aplikácie maticových hier. In: Zborník Katedry kybernetiky VŠE. Bratislava, SPN 1967.
59. TURNOVEC, F.: Nutné a postačující podmínky pro rovnovážné body v konvexní hře. Ekonomicko-matematický obzor, 1969, č. 3.
60. TURNOVEC, F.: Kooperatívna teória hier. Ekonomické rozhľady, 1971, č. 7, č. 8.
61. TURNOVEC, F.: Ekonomická rovnováha a teória hier. In: K štrukturálnym problémom rozvoja ekonomiky Slovenska. Bratislava, Epocha 1970.
62. TURNOVEC, F.: Konsens ako pravidlo volebného rozhodovania. In: Viackriteriálna optimalizácia, zv. 3. Bratislava, VŠE 1989.
63. TURNOVEC, F.—CHOBOT, M.: Teória hier. Bratislava, SPN 1967.
64. VOROBIEV, N. N.: Situacii ravnovesija v bimatričnych igrach. Teorija verojatnostej i jejo primenenija, 1958, č. 3.
65. VOROBIEV, N. N.: Matričnyje igry (zborník prekladov). Moskva, Izdateľstvo fiziko-matematičeskoj literatury 1961.
66. VOROBIEV, N. N.: Beskonečnyje antagonističeskije igry (zborník prekladov). Moskva, Izdateľstvo fiziko-matematičeskoj literatury 1967.
67. VOROBIEV, N. N.: Teorija igr, lekcii dľa ekonomistov-matematikov. Leningrad, Izd. LGU 1974.
68. VOROBIEV, N. N.: Koalicionnyje igry. Teorija verojatnostej i jejo primenenija, 1967, č. 2.
69. VOROBIEV, N. N.: Razvitije teorii igr. Doslov k ruskému prekladu monografie 47. Moskva, Izd. Nauka 1970.
70. VOROBIEV, N. N.: Teorija igr. Moskva, Izd. Nauka 1985.
71. WALD, A.: Basic Ideas of General Theory of Statistical Decision Rules. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Providence, 1952.

EDÍCIA EKONOMICKEJ LITERATÚRY

Vysokoškolská učebnica je určená študentom VŠE i pracovníkom v oblasti riadenia ekonomiky

Doc. Ing. Michal Chobot, CSc.
Doc. RNDr. Ing. František Turnovec, CSc.
RNDr. Vladimír Ulašin

TEÓRIA HIER A ROZHODOVANIA

MDT 519.81(075.8)
519.83(075.8)

Vydalo Vydavateľstvo Alfa,
Hurbanovo nám. 3, 815 89 Bratislava v roku 1991 ako svoju 12 208. publikáciu

Zodpovedný redaktor Ing. Daniel Bytčánek
Jazyková redaktorka Katarína Halčinová
Technická redaktorka Jana Kubová
Ochranný obal a väzbu navrhol akad. arch. Róbert Němeček

Vytlačila Kníhtlačiareň Svornosť, š. p., 832 10 Bratislava, Račianska 20
232 strán, 14 tabuliek, 1 obrázok; 14,82 AH, 15,16 VH
1. vydanie.

03/2

ISBN 80-05-00702-7